Section 16. Stokes' theorem とその応用

- Stokes' thm
- de Rham コホモロジー・関連の応用

目標: Stokes' theorem ☆

Section 16.1 : Stokes の定理

設定 : M : n 次元 C^∞-mfd with boundary $(n \geq 1)$

σ : M 上の向き

記号 : ∂M : M の境界多様体

$\partial \sigma$: σ の誘導する ∂M 上の向き

準備：

Prop 16.1.1：$l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする．${}^\forall \eta \in A^l(M)$, $\mathrm{supp}\, d\eta \subset \mathrm{supp}\, \eta$.

特に $\eta \in A_c^l(M)$ のとき，$d\eta \in A_c^{l+1}(M)$.

Prop 16.1.2：$l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\eta \in A_c^l(M)$ を fix.

各 $p \in \partial M$ について，$T_p(\partial M) \subset T_pM$ とみなし，

$$(\eta|_{\partial M})_p : (T_p(\partial M))^l \to \mathbb{R}$$
$$(v_1 \cdots v_l) \mapsto \eta_p(v_1, \cdots, v_l)$$

とおくと，$\eta|_{\partial M} : \partial M \to T^{(0,l)}\partial M$, $p \mapsto (p, (\eta|_{\partial M})_p)$

は $A_c^l(\partial M)$ の元を定める．

@ Stokes' theorem

Thm 16.1.3 : $\forall \omega \in \Lambda_c^{n-1}(M)$,

$$\int_{(M,\sigma)} \underbrace{d\omega}_{\in\, \Lambda_c^n(M)} = \int_{(\partial M, \partial\sigma)} \underbrace{(\omega|_{\partial M})}_{\in\, \Lambda_c^{n-1}(\partial M)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \Lambda_c^{n-1}(M) & \xrightarrow{\ d\ } & \Lambda_c^n(M) \\ \text{restriction on } \partial M \big\downarrow & \circlearrowleft & \big\downarrow \int_{(M,\sigma)} \\ \Lambda_c^{n-1}(\partial M) & \xrightarrow[\int_{(\partial M,\partial\sigma)}]{} & \mathbb{R} \end{array} \right)$$

◎ Stokes' theorem は微積分の基本定理の一般化

Ex 16.1.4 : $M = [0,1]$

σ : "$\left(\frac{d}{dx}\right)_p \in \sigma_p$" (for each $p \in M$)

⇝ $\partial M = \{0, 1\}$ (2点)

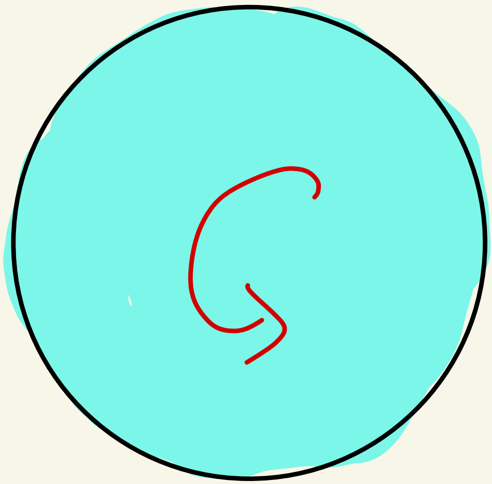
$\partial\sigma$: $(\partial\sigma)_0 = \mathbb{R}_{<0}$, $(\partial\sigma)_1 = \mathbb{R}_{>0}$

$\forall f \in C_c^\infty(M) = C^\infty(M)$ を fix

Stokes' theorem の左辺 $= \int_{(M,\sigma)} df = \int_0^1 f'(x)\,dx$

⟶ の右辺 $= \int_{(\partial M, \partial\sigma)} f|_{\partial M} = f(1) - f(0)$

Ex 16.1.5 :



$M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$

σ : " $(dx)_p \wedge (dy)_p \in \sigma_p$ " for each $p \in M$.

Q $\int_{(M,\sigma)} dx \wedge dy = ??$

$\omega = \frac{1}{2}(-y\,dx + x\,dy) \in A^1(M) = A^1_c(M)$ とおく.

このとき $d\omega = dx \wedge dy$. (cf. Prop 11.1.5)

Stokes thm より

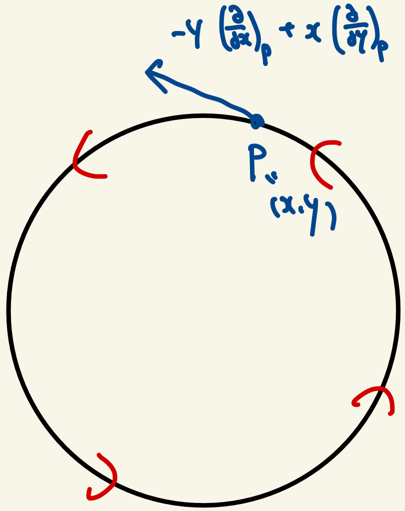
$$\int_{(M,\sigma)} dx\wedge dy = \int_{(M,\sigma)} d\omega = \int_{(\partial M,\partial\sigma)} (\omega|_{\partial M})$$

いま

$\partial M = \{(x,y)\in M \mid x^2+y^2=1\} = S^1$

$\partial\sigma$: "$-y\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \in (\partial\sigma)_p$"

for each $p=(x,y)\in\partial M$



$d\theta \in A^1(S^1)$ を

各 $p = (x, y) \in S^1$ において

$$(d\theta)_p : T_pS^1 \to \mathbb{R}, \quad \lambda\left(-y\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p\right) \mapsto \lambda$$

$$T_pS^1 = \left\{ \lambda\left(-y\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p\right) \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

として定める

各 $p = (x, y) \in S^1$ において

$\omega_p\left(-y\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + x\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p\right) = \frac{1}{2}$ となることに注意すると、

$$\omega|_{S^1} = \frac{1}{2}d\theta \quad \text{が分かる.}$$

従って

$$\int_{(\partial M, \partial\sigma)} \omega|_{\partial M} = \int_{(S^1, \partial\sigma)} \frac{1}{2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{(S^1, \partial\sigma)} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta$$

ギロン必要

通常のリーマン積分の意味

$$= \frac{1}{2} 2\pi = \pi .$$

これより $\displaystyle\int_{(M,\sigma)} dx \wedge dy = \pi$ を得る

（単位円板の面積を求めた）

Stokes' thm の証明の準備： (Thm 16.1.2)

$\mathcal{A}$: M の極大 H_n-atlas

$\partial\mathcal{A}$: ∂M の極大 C^∞-atlas とする.

（∂M：通常の意味の多様体とみなせる.）

Prop 16.1.6 : $(O \overset{\subset M}{,} U \overset{\subset H_n}{,} u) \in \mathcal{A}$ とする.

$$\partial O := O \cap \partial M \underset{\text{open}}{\subset} \partial M$$

$$\partial U := \{ u \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (u_1, \cdots, u_{n-1}, 0) \in U \} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n-1}$$

で取り

$$\partial u : \partial O \to \partial U, \quad p \mapsto (u_1(p), u_2(p), \cdots, u_{n-1}(p)) \ : \text{同相}$$

$$(\partial O, \partial U, \partial u) \in \partial\mathcal{A}$$

また $\varepsilon = \pm 1$ について $(O, U, u) \in \mathcal{A}^{(\sigma, \varepsilon)}$ ならば

$$(\partial O, \partial U, \partial u) \in \partial\mathcal{A}^{(\partial\sigma, (-1)^n \varepsilon)}$$

Prop 16.1.7: $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\forall \omega \in \Lambda^k_c(M)$,

$\exists N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\exists \{(O_\ell, U_\ell, \varphi_\ell) \in \bigsqcup_{\varepsilon=\pm 1} \mathcal{A}^{(\sigma,\varepsilon)}\}_{\ell=1,\cdots,N}$

$\exists \{\omega_\ell \in \Lambda^k_c(M; O_\ell)\}_{\ell=1,\cdots,N}$ s.t. $\omega = \sum_{\ell=1}^{N} \omega_\ell$

Hint: Cor 14.4.3 と同じゴロン

Stokes' thm の証明

(Thm 16.1.2)

アイデア：微積分の基本定理！

$\omega \in A_c^{n-1}(M)$ を fix

㊙ $\int_{(M,\sigma)} d\omega = \int_{(\partial M, \partial\sigma)} (\omega|_{\partial M})$

Case 1 $\exists (O, U, x) \in \bigsqcup_{\varepsilon \in \{\pm 1\}} \mathcal{A}^{(\sigma, \varepsilon)}$ s.t. $\omega \in \Lambda_c^{n-1}(M; O_i)$ の場合

上のような (O, U, x) を fix.

Prop 9.3.3 より

$\exists ! \{ g_j^\omega \in C^\infty(O) \}_{j=1,\cdots,n}$ s.t. $\omega|_O = \sum_{j=1}^{n} g_j^\omega \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$

dx_j を抜く

よって Prop 11.1.5 より

$$(d\omega)|_O = \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial x_j} g_j^\omega \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

$\mathrm{supp}\, d\omega \subset \mathrm{supp}\,\omega \subset O$ に注意すると $d\omega \in \mathcal{A}^n_c(M; O)$.

(Prop 16.1.1)

また

$\varepsilon^\sigma_{\mathcal{U}} \in \{\pm 1\}$ を $(O, U, \mathcal{U}) \in \mathcal{A}^{(\sigma, \varepsilon^\sigma_{\mathcal{U}})}$ となるように fix

このとき $(\partial O, \partial U, \partial \mathcal{U}) \in \partial\mathcal{A}^{(\partial\sigma, (-1)^n \varepsilon^\sigma_{\mathcal{U}})}$ (cf. Prop 16.1.6)

であり

$$\omega|_{\partial M} \in \mathcal{A}^{n-1}_c(\partial M; \partial O) \text{ であり}$$

$$(\omega|_{\partial M})|_{\partial O} = \left(y^\omega_n|_{\partial M}\right) d(\partial x_1) \wedge \cdots \wedge d(\partial x_{n-1}).$$

示 $\int_{(M,\sigma)} d\omega = \int_{(\partial M,\partial\sigma)} (\omega|_{\partial M})$

右辺 $= \int_{(\partial O,\,(-1)^n \varepsilon_M^\sigma)} (\omega|_{\partial M})$ 　　 $\left((\omega|_{\partial M}) \in A_c^{n-1}(\partial M;\partial O) \right)$

$= (-1)^n \varepsilon_M^\sigma \cdot \left(j_n^\omega \circ (\partial u)^{-1} \text{ の積分 on } \partial U \right)$

$\in C_c^\infty(\partial U)$

$=: ☆$ とおく.

また

$$\text{左辺} = \int_{(M,\sigma)} d\omega = \int_{(O,\,\varepsilon_u^\sigma)} d\omega \qquad \left(\because\ d\omega \in \mathcal{A}_c^n(M;O)\right)$$

$$= \varepsilon_u^\sigma \cdot \left(\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial u_j} g_j^\omega \right) \circ u^{-1}}_{\in C_c^\infty(U)} \text{ の積分 on } U \right)$$

$$= \varepsilon_u^\sigma \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \left(\underbrace{\frac{\partial g_j^\omega}{\partial u_j} \circ u^{-1}}_{\in C_c^\infty(U)} \text{ の積分 on } U \right)$$

= ▽★ とおく

示 ★ = ★★

各 $j = 1, \cdots, n$ について

$$\varphi_j : H_n \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \begin{cases} g_j^{\omega}(x^{-1}(u)) & u \in U \\ 0 & u \notin U \end{cases}$$ とおく.

このとき $\varphi_j \in C^\infty(H_n)$ （$g_j^{\omega} \circ x^{-1}$ の support が コンパクトであることから分かる）

かつ

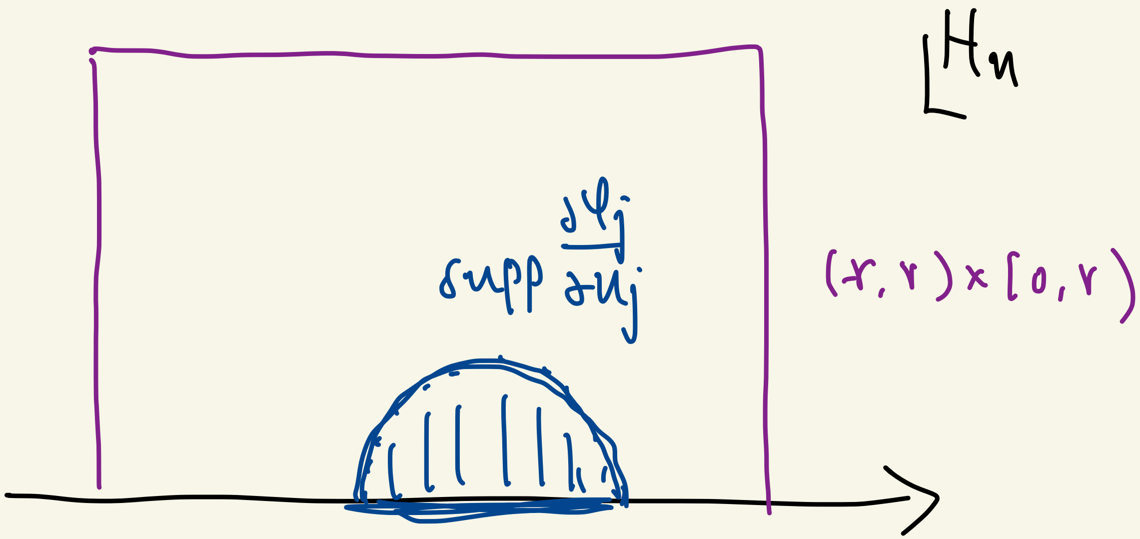
$$\frac{\partial g_j^{\omega}}{\partial x_j} \circ x^{-1} \text{ の積分 on } U = \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_j} \text{ の積分 on } H_n$$

$r \in \mathbb{R}_{>0}$ であって

$$\operatorname{supp} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_j} \subset (-r, r) \times \cdots \times (-r, r) \times [0, r) \subset H_n$$

となるものを fix

（$\operatorname{supp} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_j}$：コンパクト）



このとき

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial u_j} \text{ の積分 on } H_r = \int_{[-r,r]^{n-1}\times[0,r]} \frac{\partial \varphi_j}{\partial u_j}(u_1\cdots u_n)\, du_1 \cdots du_n$$

フビニの定理

$$= \begin{cases} \int_{-r}^{r}\cdots\int_{0}^{r}\left(\int_{-r}^{r}\frac{\partial \varphi_j}{\partial u_j}(u_1\cdots u_n)\,du_j\right)du_1\cdots\widehat{du_j}\cdots du_n & (j \neq n) \\ \int_{-r}^{r}\cdots\int_{-r}^{r}\left(\int_{0}^{r}\frac{\partial \varphi_n}{\partial u_n}(u_1\cdots u_n)\,du_n\right)du_1\cdots du_{n-1} & (j = n) \end{cases}$$

微積分の基本定理!

$$= \begin{cases} \int_{-r}^{r}\cdots\int_{0}^{r}\left[\varphi_j(u_1\cdots u_n)\right]_{u_j=-r}^{u_j=r} du_1\cdots\widehat{du_j}\cdots du_n & (j\neq n) \\ \int_{-r}^{r}\cdots\int_{-r}^{r}\left[\varphi_n(u_1\cdots u_n)\right]_{u_n=0}^{u_n=r} du_1\cdots du_n & (j=n) \end{cases}$$

$\left[\varphi_j(u_1\cdots u_n)\right]_{u_j=-r}^{u_j=r} = 0$

$\left[\varphi_n(u_1\cdots u_n)\right]_{u_n=0}^{u_n=r} = -\varphi_n(u_1,\ldots,u_{n-1},0)$

$$= \begin{cases} 0 & (j \neq n) \\ -\int_{-r}^{r} \cdots \int_{-r}^{r} \varphi_j(u_1 \cdots u_n, 0)\, du_1 \cdots du_{n-1} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & (j \neq n) \\ -\int_{[-r,r]^{n-1}} \varphi_j(u_1 \cdots u_n, 0)\, du_1 \cdots du_{n-1} \end{cases}$$

こんどは ☆☆ $:= \varepsilon^{\sigma}_{u} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \left(\frac{\partial y_j^{\omega}}{\partial u_j} \circ u^{-1}\right.$ の積分 on $\left. U \right)$

$$= (-1)^n \varepsilon^{\sigma}_{u} \int_{[-r,r]^{n-1}} \varphi_j (u_1 \cdots u_n, 0)\, du_1 \cdots du_{n-1}$$

$\hookrightarrow \begin{cases} y^{\omega}_{n} \circ (\partial u)^{-1} (u_1 \cdots u_n) & \text{if } (u_1 \cdots u_n) \in \partial U \\ 0 & \text{if } (u_1 \cdots u_n) \notin \partial U \end{cases}$

$= (-1)^n \varepsilon^{\sigma}_{u} \left(y^{\omega}_{n} \circ (\partial u)^{-1}\right.$ の積分 on $\left.\partial U \right)$

= ☆ (Case 1 おわり)

Case 2: 一般の場合.

Prop 16.1.7 より

$\{(O_i, U_i, \varphi_i)\} \in \bigsqcup_{\varepsilon} A^{(\sigma,\varepsilon)}\}_{i=1,\cdots,N}$, $\{\omega_i \in \Lambda_c^{n-1}(M; O_i)\}_{i=1,\cdots,N}$

s.t. $\omega = \sum_{i=1}^{N} \omega_i$ を得る.

$$\int_{(M,\sigma)} d\omega = \sum_i \int_{(M,\sigma)} d\omega_i$$

↓ Case 1

$$= \sum_i \int_{(\partial M, \partial\sigma)} (\omega_i|_{\partial M})$$

$$= \int_{(\partial M, \partial\sigma)} \sum_i (\omega_i|_{\partial M}) = \int_{(\partial M, \partial\sigma)} (\omega|_{\partial M})$$

∎

Section 16.2 : 最高次 de Rham コホモロジーについて

Ex 16.2.1 : $S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \}$: n 次元 C^∞-mfd.

$\omega_{S^n} \in \Omega^n(S^n)$ を以下で定める: (Ex 9.3.4)

$$\begin{cases} \text{各 } p \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \text{ について} \\ (\omega_{S^n})_p : (T_p S^n)^n \to \mathbb{R} \\ \qquad (v_1, \cdots, v_n) \mapsto \det(p\ v_1 \cdots v_n) \end{cases}$$

Q $\exists \eta \in \Omega^1(S^2)$ s.t. $d\eta = \omega_{S^n}$?

A : No! $\rightsquigarrow H^2_{dR}(S^2) \neq 0$.

Claim: $\neg\left({}^{\exists}\eta \in A^1(S^2) \text{ s.t. } d\eta = \omega_{S^n} \right)$

ⓐ Stokes' thm を用いて示す!

背理法: $d\eta = \omega_{S^n}$ と仮定する.

S^n 上の向き σ を

各 $p \in S^n$ について

$$\sigma_p = \{ \alpha \in T_p^{(n,0)} S^n \mid (\omega_{S^n})_p(\alpha) > 0 \} \subset T_p^{(n,0)} S^n$$

とおくと,

σ は S^n 上の向きを定める ($\omega_p \neq 0$ が重要)

ここで

$$\int_{(S^n,\sigma)} \omega_{S^n} > 0 \quad が分かる$$

Hint 各$(O,U,\varphi) \in A^{(\sigma,\varepsilon)}$について

$\omega_{S^n}|_O = g\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ と書くと

$\varepsilon g > 0$ on O

$\partial S^n = \emptyset$ に注意すると

$$0 < \int_{(S^n,\sigma)} \omega_{S^n} = \int_{(S^n,\sigma)} d\eta$$

$$\underset{\text{Stokes}}{=} \int_{(\emptyset,\partial\sigma)} \eta|_\emptyset$$

$$= 0 \quad これは矛盾!$$

□

一般化すると

Thm 16.2.2: M : コンパクト n 次元 C^∞-mfd with $\partial M = \emptyset$

$\omega \in A^n(M)$ with $\omega_p \neq 0$ $(\forall p \in M)$

について $[\omega] \neq 0$ in $H^n_{dR}(M)$

このような ω が存在 $\Leftrightarrow$ M は向き付け可能

Cor 16.2.3: $\forall M$: 向き付け可能コンパクト n 次元 C^∞-mfd with $\partial M = \emptyset$.

$H^n_{dR}(M) \neq 0$

Section 16.3: de Rham 準同型 (ふんいきだけ)

この節の詳しい内容を知りたい場合は

Lee, Introduction to smooth manifolds. GTM

または部分的には

幾何学D・多様体幾何基礎B 2020年度講義ノート

(teams にはりつけます) を参照されたい.

設定 : M : n 次元 C^∞-mfd.

Stokes' thm のよく使う形

Thm 16.3.1 : $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

Ω : compact k 次元 C^∞-mfd with boundary

σ : Ω 上の向き

$\varphi : \Omega \to M$: C^∞-map とする.

このとき $^\forall \omega \in \Lambda^k(M)$,

$$\int_{(\Omega, \sigma)} \varphi^*(d\omega) = \int_{(\partial\Omega, \partial\sigma)} \varphi^*\omega .$$

M の $\mathbb{R}$係数 smooth singular k-th homology を

$H_k(M;\mathbb{R})$ とおく.

また 〜〜〜 cohomology を

$H^k(M;\mathbb{R})$ とおく.

Fact 16.3.2:

$H_k(M;\mathbb{R})$, $H^k(M;\mathbb{R})$ は "連続版" $\mathbb{R}$係数 singular k-th homology / cohomology と線型同型.

└ 特に M についてホモトピー不変.

⓪ de Rham 準同型

Thm 16.3.3:

$$H_k(M;\mathbb{R}) \times H^k_{dR}(M) \to \mathbb{R}$$

$$([c],[\omega]) \mapsto \int_c \omega$$

は well-defined で双線型

特に線型写像 $H^k_{dR}(M) \to (H_k(M;\mathbb{R}))^\vee$ を誘導する
(de Rham homomorphism)

カギは "Ω が compact k 次元 C^∞-mfd with corner"

の場合の Thm 16.3.1 (Stokes thm).

◎ de Rham の定理

Thm 16.3.4: de Rham homomorphism は

$H^k_{dR}(M)$ から $H^k(M;\mathbb{R})$ への $\mathbb{R}$-代数同型を誘導する.

積は wedge 積　　積は cup 積

解析的に位相についての情報がとり出せる!
($H^k_{dR}(M)$)　($H^k(M;\mathbb{R})$)