

先端数学 2022

担当：奥田隆幸

題目：群作用と等質空間

◎ レポート課題 については
マニュアルロードしているファイルを参照,

レポート課題	講義動画
一般論 + 具体例	具体例 (ガラスエン)

内容

§1: 研究分野紹介 + この講義について

§2: ガウス2重 \wedge の直交群の作用

§3: ガウス2重 \wedge の位相

§4: ガウス2重 \wedge のイソトロープ

§1 研究分野紹介 + この講義の内容について

奥田の専門 : 対称空間論

対称空間とは ... 位相空間の一種であり

● 微分構造 (cf. 幾何学 A)

● 点対称構造

を持つもの

具体例 : U -リット空間, 球面, 射影空間,

双曲空間, グラスマン など...

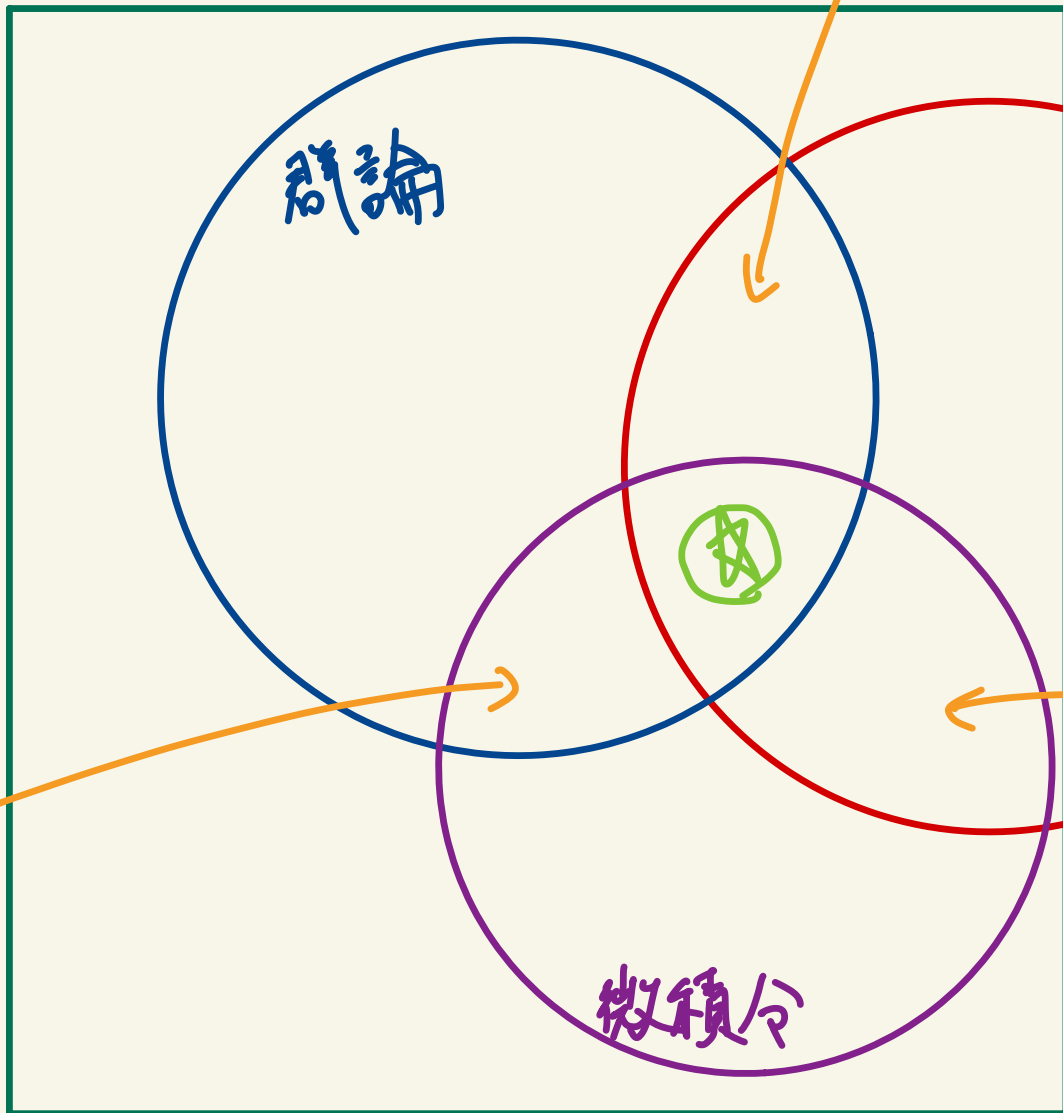
对称空间论、位置



線型代數

位相群論

位相空間論



表現論

微積分

群體代數

奥田の研究 1-2

対称空間の...

キ-7-ド

- ① 構造論 (Lie群, Lie代数, ルート系)
- ② 一般化 (アノミエ-ジャンステ-ウ, パンドル)
- ③ 幾何 (商写像体, 部分写像体, 幾何構造)
- ④ 解析 (表現論, 調和解析, フーリエ解析)
- ⑤ 組合せ論 (符号理論, デザイン理論)

1+6" 1+2"

講義内容：グラスマン

対称空間の重要例

対称空間論の題材(かゝ難所)の一つ：

群の言葉で空間を理解する!

零団気を感じて欲しい

§1 おわり

§2 グラスマン n の直交群の作用

内容

- ① “グラスマン” $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ の定義

- ② 直交群 $O(n)$ の定義

- ③ $O(n)$ の $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ への作用

$n > k \geq 1$: 自然数 と可也.

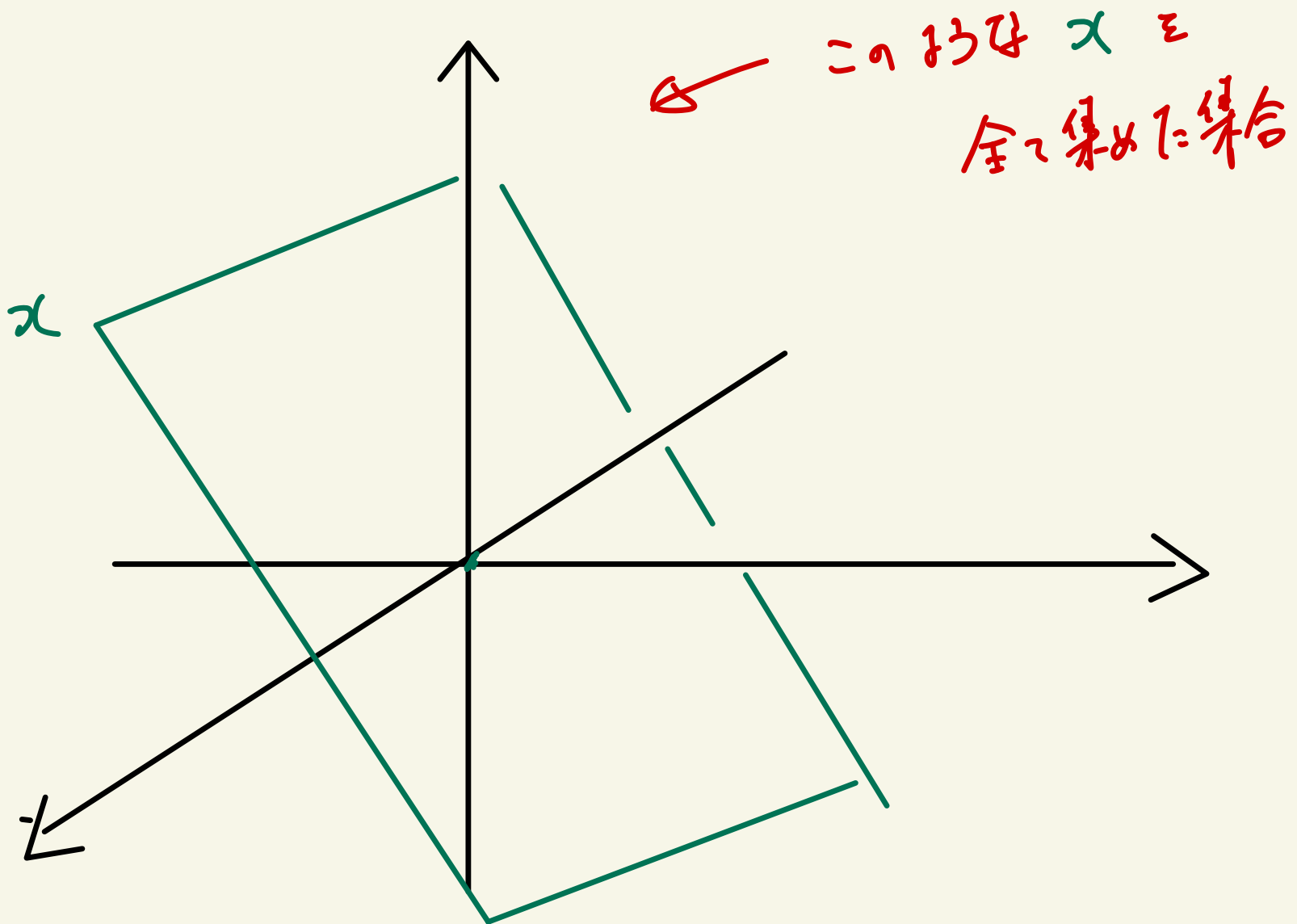
Def

$\text{Gr}_k(\mathbb{R}^n) := \left\{ \alpha \subset \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} \alpha \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の } k\text{-次元} \\ \text{線形部分空間} \end{array} \right\}$
(k -グラスマン
of \mathbb{R}^n)

と可也.

$\alpha \in \text{Gr}_k$ での注意.

$n=3$ $k=2$ の k -ジ



ゴッ-ル : $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ は "群の言葉" で理解したい

Def : $O(n) := \{ g \in M(n; \mathbb{R}) \mid \underline{\overset{t}{g}g = I_n} \}$
[(n次直交群) (n列) 直交行列全体の集合]

Fact :

$O(n)$ は 行列の種類について群をなす.

Def 若 $g \in O(n)$, $x \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ 则

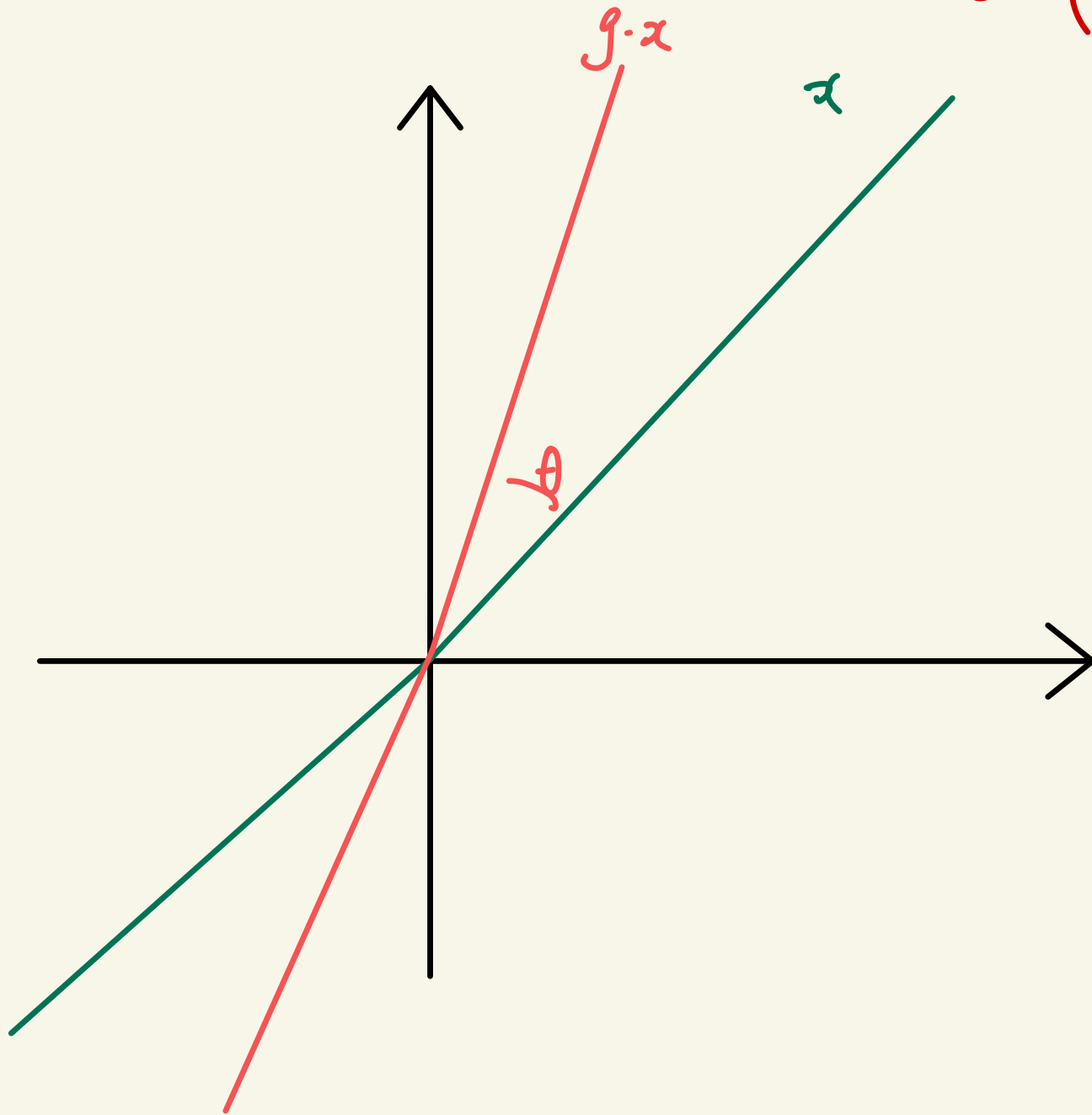
$$g \cdot x := \{ \underbrace{gv \mid v \in x \subset \mathbb{R}^n} \}$$

$\in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$
k-次元部分空间 in \mathbb{R}^n

$x \cdot y \subset$.

$n=2, k=1$ の場合

$$g = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in O(2)$$



Theorem A: " $(g, \alpha) \mapsto g \cdot \alpha$ " は

$O(n)$ の $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ 上の

推移的かつ作用を定める。

の代わりに

作用 $\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \forall g, h \in O(n), \forall \alpha \in Gr_k(\mathbb{R}^n), \quad \underline{g \cdot (h \cdot \alpha) = (gh) \cdot \alpha} \\ \textcircled{2} \forall \alpha \in Gr_k(\mathbb{R}^n), \quad \underline{I_n \cdot \alpha = \alpha} \end{array} \right.$

推移的 $\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{3} \forall \alpha, \gamma \in Gr_k(\mathbb{R}^n), \quad \underline{\exists g \in O(n) \text{ s.t. } g \cdot \alpha = \gamma} \end{array} \right.$

を成す。

§2 おわり

§3 グラスマニフォールド

Recall:

$$Gr_k(\mathbb{R}^n) := \left\{ \alpha \subset \mathbb{R}^n \mid \alpha \text{ は } k\text{-次元線型} \right. \\ \left. \text{部分空間) in } \mathbb{R}^n \right\}$$

内容: $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ の位相

1-11 : $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ に "自然な"

└

位相を定めるには

Recall : $O(n) := \{g \in M(n; \mathbb{R}) \mid g^T g = I_n\}$

n -次元直交群

$O(n)$ は $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ に

" $g \cdot \alpha := \{g v \mid v \in \alpha \} \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ "

1-1) 推移的 (= 作用可) 。

For $x \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ について

写像 $\pi_x : \underset{\cup}{O(n)} \rightarrow \underset{\cup}{\text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)}$

$$g \mapsto g \cdot x$$

を考えた。

Fact: 作用の推移性から $\pi_x : O(n) \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$

は 全射

Theorem B $O(n) \subset M(n; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ← 標準位相



は 相対位相 による 位相群 とする。

Theorem C $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ の 位相 Θ として

次の条件を満たすものが唯一存在する。

$$\forall \alpha \in Gr_k(\mathbb{R}^n),$$

$\pi_\alpha: O(n) \rightarrow (Gr_k(\mathbb{R}^n), \Theta)$ は 連続かつ開

↑
Thm B の位相

↑
強可移性

↑
弱可移性

Theorem C $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ の位相 O で
次を満たす π も α 唯一存在する。

$$\forall \alpha \in Gr_k(\mathbb{R}^n),$$

$\pi_\alpha : O(n) \rightarrow (Gr_k(\mathbb{R}^n), O)$ は連続かつ開

↑
Thm B の位相

↑
強可移性..

↑
弱可移性..

Thm C の Hint : \hookrightarrow 本一ト課題 9, 12, “高位相”

Fact \mathcal{L} の位相について

$Gr_k(\mathbb{R}^m)$ は ユークリッド ハウスドルフ空間 である。
↑ 強い位相 ↑ 弱い位相

§3 おわり

§4 グラフと n の イソトポピー

Recall:

$O(n)$ は $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ に 行列射的 (=イソトポ) である。

内容: ○ イソトポピー の 定義

○ イソトポピー への $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ の 復元

Def : 各 $x \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ について

$$\underline{O(n)^x} := \{ g \in O(n) \mid \underline{g \cdot x = x} \}$$

とよぶ.

$O(n)$ の x に対応

した部分群

Fact : $O(n)^x$ は $O(n)$ の部分群

$\alpha \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ は固定可也。

$$G := O(n), \quad H := O(n)^{\times} \simeq \mathfrak{o}(n).$$

更には

$$G/H := \{ [g]_H \mid g \in G \} : \text{右 } H \text{ 剰余類全体空間}$$

\uparrow
 $g \in \text{右 } H \text{ 剰余類}$
 $[g]_H = \{ gh \mid h \in H \} \subset G$

(位相商位相)

Theorem D

写像 $\pi_\alpha : G = O(n) \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ は

同相写像 $G/H \xrightarrow{\sim} \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ へと誘導可也。

Theorem D 写像 $\pi_x : G = O(n) \rightarrow Gr_k(\mathbb{R}^n)$ は

同相 $G/H \simeq Gr_k(\mathbb{R}^n)$ を誘導する。

⇐)

↑ 位相空間 $Gr_k(\mathbb{R}^n)$ の研究 ↓

を原理的に は

- ① $G = O(n)$ の研究
- ② $H = O(n)^x$ の研究
- ③ $H \hookrightarrow G$ の研究

⇐ 合解 でした!!

§4 おわり