幾何学 A 中間試験 問 1–16 (110 点満点)

注意点: 持ち込み可です．持ち込んだ紙資料 (講義ノート, 教科書, メモ, 過去問など) および, PC やスマホを見たりネット検索しても構いません．ただし持ち込み資料を他受験者と共有したり, 他人とチャットや掲示板などでリアルタイムで連絡を取る行為は禁止します (AI とチャットを行うことは禁止しない).

学籍番号：________________________ 氏名：________________________

$\boxed{1}$ (20 点満点)

問 1. (5 点) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, M を位相空間とする. M の n 次元局所座標系 $(O, U, \boldsymbol{u})$, $(O', V, \boldsymbol{v})$ について, $(O, U, \boldsymbol{u})$ から $(O', V, \boldsymbol{v})$ への座標変換 $\tau_{\boldsymbol{uv}}$ の定義を述べよ (定義域と値域も明記すること). また $\tau_{\boldsymbol{uv}}$ を説明する絵を描け.

問 2. (5 点) これまでの講義において

(1) ユークリッド空間の開集合上の C^∞ 級関数,

(2) ユークリッド空間の開集合の間の C^∞ 級写像

の定義の紹介は完了している. 以下の概念 (a), (b), (c), (d) のうち, 上記 (1), (2) により定義されたとは**みなせない**概念をすべて挙げよ (理由, 説明不要):

概念 (a): $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ について, U 上の C^∞ 級関数.

概念 (b): $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 3x_1\}$ について, U 上の C^∞ 級関数.

概念 (c): $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ および $V = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 < 0\}$ について, U から V への C^∞ 級写像.

概念 (d): $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > x_2\}$ および $V = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 = y_2\}$ について, U から V への C^∞ 級写像.

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問 3. (5 点) $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U, U_1, U_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}$ の開集合とする. 以下の主張のうち「意味が通っていて, なおかつ主張内容が正しい」ものをすべて挙げよ (理由, 説明, 証明などは不要):

主張 A: $f \in C^\infty(U)$, $p \in U$ について, $f(p) \in \mathbb{R}$.

主張 B: $p \in U$, $\eta \in T_pU$, $f \in C^\infty(U)$ について, $\eta(f) \in \mathbb{R}$.

主張 C: 連続写像 $\varphi : U_1 \to U_2$, $f \in C(U_2)$ について, $\varphi^*(f) \in C(U_1)$.

主張 D: C^∞ 級写像 $\varphi : U_1 \to U_2$, $p \in U_1$, $\eta \in T_pU_1$ について, $(d\varphi)_p(\eta) \in C^\infty(U_2)$.

主張 E: C^∞ 級写像 $\varphi : U_1 \to U_2$, $p \in U_1$, $\eta \in T_pU_1$, $g \in C^\infty(U_2)$ について, $((d\varphi)_p(\eta))(g) \in \mathbb{R}$.

問 4. (5 点) $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U_1, U_2, U_3 をそれぞれ $\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}, \mathbb{R}^{n_3}$ の開集合とする. 以下の主張のうち「意味が通っていて, なおかつ主張内容が正しい」ものをすべて挙げよ (理由, 説明, 証明などは不要):

主張 F: C^∞ 級写像 $\varphi : U_1 \to U_2$, $f \in C^\infty(U_2)$, $i = 1, \ldots, n_1$ について, U_1 上の関数としての等式

$$\frac{\partial(\varphi^*(f))}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n_2} \left(\varphi^* \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} \right) \right) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right)$$

が成立する. ただし各 $x \in U_1$ に対し,

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n_2}(x))$$

となるように $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_2} \in C^\infty(U_1)$ を定めた.

主張 G: $\varphi : U_1 \to U_2$, $\psi : U_2 \to U_3$ が共に C^∞ 級写像であるとする. このとき合成写像

$$\psi \circ \varphi : U_1 \to U_3$$

は C^∞ 級写像である. また $p \in U_1$ とすると, T_pU_1 から $T_{((\psi\circ\varphi)(p))}U_3$ への線型写像として

$$(d(\psi \circ \varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p.$$

主張 H: 全単射 C^∞ 級写像 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について, その逆写像 $\varphi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続ならば, φ^{-1} は C^∞ 級である.

$\boxed{2}$ (30 点満点) 以下, $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U, U_1, U_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}$ の開集合とする. また M を位相空間とする.

問 5 – 問 10 で紹介する定義達について, 修正の必要がある場合はそれぞれ正しく修正したものを述べよ (修正版を書いたうえで, 修正した箇所に印または説明をつけること). また修正の必要がない場合には「修正の必要なし」とせよ (講義と同じ意味の定義を違う言い回しで紹介している場合もあるので注意せよ).

問 5. (5 点) 写像 $\Psi : C(U_2) \to C(U_1)$ が線型であるとは, 任意の $f \in C(U_2)$, $x, y \in U_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ について

- $(\Psi(f))(x+y) = (\Psi(f))(x) + (\Psi(f))(y)$ および
- $(\Psi(f))(\lambda x) = \lambda(\Psi(f))(x)$

が成り立つこと.

問 6. (5 点) 各 $p \in U$ について

$$T_pU = \{\eta \in \mathcal{L}(C^\infty(U), \mathbb{R}) \mid \eta(f \cdot g) = \eta(f) \cdot g + f \cdot \eta(g) \text{ for any } f, g \in C^\infty(U)\}$$

を U の p における接空間という. ただし $\mathcal{L}(C^\infty(U), \mathbb{R})$ は $C^\infty(U)$ から $\mathbb{R}$ への線形写像全体のなすベクトル空間とする.

問 7. (5 点) 連続写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ が C^∞ 級であるとは, 任意の $f \in C^\infty(U_2)$ について, $\varphi^*(f) \in C^\infty(U_1)$ となること.

問 8. (5 点) C^∞ 級写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ および点 $p \in U_1$ について, 各 $\eta \in T_pU_1$ に対して

$$(d\varphi)_p(\eta) : C^\infty(U_2) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \eta(\varphi^*(f))$$

として定めた写像

$$(d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2,\ \eta \mapsto (d\varphi)_p(\eta)$$

を φ の p における全微分という.

学籍番号：____________________ 氏名：____________________

問 9. (5 点) $(O, U, \boldsymbol{u})$ が M の n 次元局所座標系であるとは, 以下を満たすこと:

- O は M の部分集合,
- U は $\mathbb{R}^n$ の部分集合,
- $\boldsymbol{u} : O \to U$ は同相写像 (ただし O, U の位相はそれぞれ M, $\mathbb{R}^n$ の相対位相として定める).

問 10. (5 点) $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ が M の n 次元 C^∞-atlas であるとは, 以下を満たすこと:

- $\bigcup_{(O,U,\boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}_0} O = M$,
- 任意の $(O, U, \boldsymbol{u}), (O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{A}_0$ について,

$$O \cap O' \to \boldsymbol{u}(O \cap O'),\ x \mapsto \boldsymbol{u}(x)$$

と

$$O \cap O' \to \boldsymbol{v}(O \cap O'),\ x \mapsto \boldsymbol{v}(x)$$

がそれぞれ C^∞ 級写像.

$\boxed{3}$ (30 点満点)

問 11. (10 点) V, W を実ベクトル空間とする．また $f : V \to W$, $g : V \to W$ をそれぞれ線形写像であるとする．ここで

$$f + g : V \to W,\ v \mapsto f(v) + g(v)$$

が和を保つことを示したい．以下でその証明を試みているが, その議論には一か所以上の不備がある．議論全体を適切に修正せよ (修正版を書いたうえで, 議論の不備がある箇所に印または説明をつけること).

議論: $v_1, v_2 \in V$ を任意にとる．以下を示せばよい:

$$\boxed{\text{示すこと}}\ (f + g)(v_1 + v_2) = (f + g)(v_1) + (f + g)(v_2).$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (f + g)(v_1 + v_2) \\
&= f(v_1 + v_2) + g(v_1 + v_2) \quad (\because f, g \text{ の線型性 }) \\
&= f(v_1) + f(v_2) + g(v_1) + g(v_2) \quad (\because f + g \text{ の定義 }) \\
&= f(v_1) + g(v_1) + f(v_2) + g(v_2) \quad (\because W \text{ の和の可換性 }) \\
&= (f + g)(v_1) + (f + g)(v_2) \quad (\because f + g \text{ の定義 }) \\
&= \text{右辺}.
\end{aligned}$$

学籍番号：____________________ 氏名：____________________

問 12. (10 点) $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, U_i を $\mathbb{R}^{n_i}$ の開集合 $(i = 1, 2)$ とし, $p \in U_1$ とする．また $\varphi : U_1 \to U_2$ を C^∞ 級写像とする．このとき, 全微分

$$(d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2$$

が和を保つことを示したい．以下でその証明を試みているが, その議論には一か所以上の不備がある．議論全体を適切に修正せよ (修正版を書いたうえで, 議論の不備がある箇所に印または説明をつけること).

議論: $f_1, f_2 \in C^\infty(U_1)$ を任意にとる．以下を示せばよい．

$$\boxed{\text{示すこと}}\ (d\varphi)_p(f_1 + f_2) = (d\varphi)_p(f_1) + (d\varphi)_p(f_2).$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (d\varphi)_p(f_1 + f_2) \\
&= \varphi^*(f_1 + f_2) \quad (\because\ \text{全微分の定義}) \\
&= \varphi^*(f_1) + \varphi^*(f_2) \quad (\because \varphi^*\ \text{の線形性}) \\
&= (d\varphi)_p(f_1) + (d\varphi)_p(f_2)) \quad (\because\ \text{全微分の定義}) \\
&= \text{右辺}.
\end{aligned}$$

問 13. (10 点) 位相空間 $M := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 3x_1\} (\subset \mathbb{R}^2)$ について考える．M の 1 次元局所座標系 $(O, U, \boldsymbol{u})$, $(O', V, \boldsymbol{v})$ を

$$O := M,\ U := \mathbb{R},\ \boldsymbol{u} : O \to U,\ x \mapsto x_1$$
$$O' := M,\ V := \mathbb{R},\ \boldsymbol{v} : O' \to V,\ x \mapsto x_2$$

として定める．$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の逆写像はそれぞれ

$$\boldsymbol{u}^{-1} : U \to O,\ u \mapsto (u, 3u),$$
$$\boldsymbol{v}^{-1} : V \to O',\ v \mapsto ((1/3)v, v)$$

となる．このとき以下の命題:

命題: $(O, U, \boldsymbol{u})$ から $(O', V, \boldsymbol{v})$ への座標変換 $\tau_{\boldsymbol{uv}}$ は C^∞ 級写像である

の証明として, 以下の議論には一か所以上の不備がある．議論全体を適切に修正せよ (修正版を書いたうえで, 議論の不備がある箇所に印または説明をつけること).

議論: $O \cap O' = M$ より, 座標変換 $\tau_{\boldsymbol{uv}}$ の定義域は $\boldsymbol{u}(O \cap O') = U = \mathbb{R}$ で, 値域は $\boldsymbol{v}(O \cap O') = V = \mathbb{R}$ である．写像

$$\boldsymbol{v} : O' \to V,\ x \mapsto x_2$$

と

$$\boldsymbol{u}^{-1} : U \to O,\ u \mapsto (u, 3u)$$

は各成分が多項式関数であるからそれぞれ C^∞ 級写像である．特にそれらの合成

$$\tau_{\boldsymbol{uv}} = \boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{u}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

も C^∞ 級写像である．

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{4}$ (30 点満点)

位相空間 $M = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\} (\subset \mathbb{R}^3)$ について考える．また $(O, U, \boldsymbol{u})$, $(O', V, \boldsymbol{v})$ を以下のように定める:

- $O = \{x \in M \mid x_1 > 0\}$, $U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_1^2 - u_2^2 < 1\}$, $\boldsymbol{u} : O \to U,\ x \mapsto (x_2, x_3)$.
- $O' = \{x \in M \mid x_2 > 0\}$, $V = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_1^2 - v_2^2 < 1\}$, $\boldsymbol{v} : O' \to V,\ x \mapsto (x_1, x_3)$.

問 14. (10 点) $\boldsymbol{u} : O \to U,\ x \mapsto (x_2, x_3)$ が写像として well-defined であることを示せ.

問 15. (10 点) 以下, $(O, U, \boldsymbol{u})$ および $(O', V, \boldsymbol{v})$ がそれぞれ M 上の二次元局所座標系であることは認める．座標変換 $\tau_{\boldsymbol{uv}}$ を書き下せ (結論のみで OK. ただし $\tau_{\boldsymbol{uv}}$ の定義域, 値域はそれぞれ $\mathbb{R}^2$ の部分集合として明示的に書き下すこと).

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問 16. (10 点) 以下, 座標変換 $\tau_{\boldsymbol{uv}}$ が C^∞ 級写像であることは認める. $p = (1/2, 0)$ とし, $q = \tau_{\boldsymbol{uv}}(p)$ とおく. このとき, 点 q における接ベクトル

$$(d\tau_{\boldsymbol{uv}})_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p\right),\ (d\tau_{\boldsymbol{uv}})_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right)_p\right),$$

をそれぞれ

$$\left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial v_2}\right)_q$$

の一次結合として表せ.