幾何学 A 期末試験 問 1–16 130 点満点

注意点: 持ち込み可です. 持ち込んだ紙資料および, PC やスマホを見たりネット検索しても構いません. ただし持ち込み資料を他受験者と共有したり, 他人とチャットや掲示板などでリアルタイムで連絡を取る行為は禁止します (AI とチャットすることは禁止しない).

キーワード: C^∞ 級多様体, C^∞ 級関数のなす $\mathbb{R}$-代数, 接空間, C^∞ 級写像, 正則部分多様体

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ (20 点満点)

問 1. (5 点) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $M = (M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とする. 以下の主張のうち「意味が通っていて, なおかつ主張内容が正しい」ものをすべて挙げよ (理由, 説明, 証明などは不要):

主張 A: $f \in C^\infty(M; \mathcal{A})$, $p \in M$ について, $f(p) \in \mathbb{R}$. また, $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}$, $x \in O$ について, $f_{\boldsymbol{u}}(x) \in \mathbb{R}$.

主張 B: $p \in M$, $\eta \in T_pM$, $f \in C^\infty(M; \mathcal{A})$ について, $\eta(f) \in \mathbb{R}$.

問 2. (5 点) $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $M_1 = (M_1, \mathcal{A}_1)$, $M_2 = (M_2, \mathcal{A}_2)$ をそれぞれ n_1 次元, n_2 次元 C^∞ 級多様体とする. 以下の主張のうち「意味が通っていて, なおかつ主張内容が正しい」ものをすべて挙げよ (理由, 説明, 証明などは不要):

主張 C: C^∞ 級写像 $\varphi : M_1 \to M_2$, $f \in C^\infty(M_2; \mathcal{A}_2)$, $p \in M_1$ について, $\varphi^*(f) \in C^\infty(M_1; \mathcal{A}_1)$ かつ $(\varphi^*(f))(p) \in \mathbb{R}$.

主張 D: C^∞ 級写像 $\varphi : M_1 \to M_2$, $p \in M_1$, $\eta \in T_pM_1$ について, $(d\varphi)_p(\eta) \in T_{\varphi(p)}M_2$.

主張 E: C^∞ 級写像 $\varphi : M_1 \to M_2$, $p \in M_1$, $\eta \in T_pM_1$, $f \in C^\infty(M_2)$ について, $(d\varphi)_p(\eta(f)) \in \mathbb{R}$.

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問 3. (5 点) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $M = (M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とする. 以下の主張のうち「意味が通っていて, なおかつ主張内容が正しい」ものをすべて挙げよ (理由, 説明, 証明などは不要):

主張 F: $f, g \in C^\infty(M; \mathcal{A})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ について, $f + g \in C^\infty(M; \mathcal{A})$, $\lambda f \in C^\infty(M; \mathcal{A})$ かつ $f \cdot g \in C^\infty(M; \mathcal{A})$.

主張 G: 各 $(O, U, \boldsymbol{u}), (O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{A}$, $u \in \boldsymbol{u}(O \cap O')$ について, $\tau_{\boldsymbol{uv}}(u) \in \boldsymbol{v}(O \cap O')$. ただし $\tau_{\boldsymbol{uv}}$ は $(O, U, \boldsymbol{u})$ から $(O', V, \boldsymbol{v})$ への座標変換とする.

主張 H: $\mathcal{A}_0$ を位相空間 M 上の任意の n 次元 C^∞-atlas とする. このとき $C^\infty(M; \mathcal{A}) = C^\infty(M; \mathcal{A}_0)$.

主張 I: 各 $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}$, $p \in O$, $i = 1, \ldots, n$ について,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i}\right)_p : C^\infty(M; \mathcal{A}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \frac{\partial f_{\boldsymbol{u}}}{\partial u_i}(\boldsymbol{u}(p))$$

と定めると,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i}\right)_p \in T_p M.$$

また,

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i}\right)_p\right\}_{i=1,\ldots,n}$$

は $T_p M$ の基底となる.

問 4. (5 点) $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $M_1 = (M_1, \mathcal{A}_1)$, $M_2 = (M_2, \mathcal{A}_2)$, $M_3 = (M_3, \mathcal{A}_3)$ をそれぞれ n_1, n_2, n_3 次元 C^∞ 級多様体とする. 以下の主張のうち「意味が通っていて, なおかつ主張内容が正しい」ものをすべて挙げよ (理由, 説明, 証明などは不要):

主張 J: C^∞ 級写像 $\varphi : M_1 \to M_2$, $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}_1$, $(O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{A}_2$ について,

$$\varphi_{\boldsymbol{uv}} : O \to V,\ u \mapsto \boldsymbol{v}(\varphi(\boldsymbol{u}^{-1}(u)))$$

と定めると, $\varphi_{\boldsymbol{uv}}$ は C^∞ 級写像.

主張 K: $\varphi : M_1 \to M_2$, $\psi : M_2 \to M_3$ が C^∞ 級写像であるとき, 合成写像 $\psi \circ \varphi : M_1 \to M_3$ は C^∞ 級写像である. また $p \in M_1$ とするとき, $T_p M_1$ から $T_{\varphi(\psi(p))} M_3$ への線型写像として

$$(d(\psi \circ \varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p.$$

$\boxed{2}$ (25 点満点)

以下, $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $M = (M, \mathcal{A})$, $M_1 = (M_1, \mathcal{A}_1)$, $M_2 = (M_2, \mathcal{A}_2)$ をそれぞれ n, n_1, n_2 次元 C^∞ 級多様体とする.

問 5 – 問 9 で紹介する定義達について, 修正の必要がある場合はそれぞれ正しく修正したものを述べよ (修正版を書いたうえで, 修正した箇所に印または説明をつけること). また修正の必要がない場合には「修正の必要なし」とせよ (講義と同じ意味の定義を違う言い回しで紹介している場合もあるので注意せよ).

問 5. (5 点) 写像 $\Psi : C(M_2) \to C(M_1)$ が線型であるとは, 任意の $f \in C(M_2)$, $x, y \in M_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ について

- $(\Psi(f))(x + y) = (\Psi(f))(x) + (\Psi(f))(y)$ および
- $(\Psi(f))(\lambda x) = \lambda(\Psi(f))(x)$

が成り立つこと.

問 6. (5 点) M 上の関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が $\mathcal{A}$ 上 C^∞ 級であるとは, 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について f が $\mathcal{A}$ 上 C^k 級であること. ただし, f が $\mathcal{A}$ 上 C^0 級であるとは, f が M 上の関数として連続であることを意味し, また, 各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について, f が $\mathcal{A}$ 上 C^{k+1} 級であるとは, 任意の $i = 1, \ldots, n$ について導関数

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : M \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h}$$

が well-defined であり, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^k(M)$ となることとする (帰納的定義). ここで $e_1, \ldots, e_n$ はベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の標準基底とした.

問 7. (5 点) $p \in M$ とする. p における $M = (M, \mathcal{A})$ の接空間 T_pM は

$$T_pM := \{\eta \in \mathcal{L}(C^\infty(M; \mathcal{A}), \mathbb{R}) \mid \eta(f \cdot g) = \eta(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \eta(g) \text{ for any } f, g \in C^\infty(M; \mathcal{A})\}$$

として定義される. ただし, $\mathcal{L}(C^\infty(M; \mathcal{A})), \mathbb{R})$ は $C^\infty(M; \mathcal{A})$ から $\mathbb{R}$ への線形写像全体のなすベクトル空間とする.

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問 8. (5 点) 連続写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ が C^∞ 級写像であるとは,

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \quad (x \in M_1)$$

となるように M_1 上の関数 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ を定めたとき, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ がそれぞれ M_1 上の C^∞ 級関数となること.

問 9. (5 点) C^∞ 級写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ が微分同相写像であるとは, φ が全単射で, 逆写像 $\varphi^{-1} : M_2 \to M_1$ が C^∞ 級写像であること.

$\boxed{3}$ (20 点満点)

問 10. (10 点) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $M = (M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とし, $p \in M$ とする. M 上の C^∞ 級関数全体のなす $\mathbb{R}$ 代数を $C^\infty(M)$ と書く. また $\eta \in T_pM$, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする.
このとき, $\lambda\eta : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ が $p \in M$ におけるライプニッツ則を満たすことの証明として, 以下の議論には数か所の不備がある. 適切に修正したものを述べよ (修正版を書いたうえで, 議論の不備がある箇所に印または説明をつけること).

議論: $f, g \in C^\infty(M)$ とする. 以下を示せばよい:

$$\boxed{\text{示すこと:}}\ (\lambda\eta)(f(p) \cdot g(p)) = ((\lambda\eta)(f) \cdot g(p)) + (f(p) \cdot (\lambda\eta)(g)).$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (\lambda\eta)(f(p) \cdot g(p)) \\
&= \lambda \cdot (\eta(f(p) \cdot g(p))) \quad (\because \text{線型写像のスカラー倍の定義}) \\
&= \lambda \cdot ((\eta(f) \cdot g(p)) + (f(p) \cdot \eta(g))) \quad (\because \eta \in T_pM) \\
&= \lambda \cdot (\eta(f) \cdot g(p)) + \lambda \cdot (f(p) \cdot \eta(g)) \quad (\because \mathbb{R}\ \text{における分配則}) \\
&= ((\lambda \cdot \eta(f)) \cdot g(p)) + (f(p) \cdot (\lambda \cdot \eta(g))) \quad (\because \mathbb{R}\ \text{における結合則と積の可換性}) \\
&= ((\lambda\eta)(f) \cdot g(p)) + (f(p) \cdot (\lambda\eta)(g)) \quad (\because \text{線型写像のスカラー倍の定義}) \\
&= \text{右辺}.
\end{aligned}$$

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問 11. (10 点) $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, M_1, M_2 をそれぞれ n_1 次元, n_2 次元 C^∞ 級多様体とする. $p \in M_1$, $\eta_1, \eta_2 \in T_pM_1$ とし, C^∞ 級写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ を固定する. このとき等式

$$(d\varphi)_p(\eta_1 + \eta_2) = (d\varphi)_p(\eta_1) + (d\varphi)_p(\eta_2)$$

の証明として, 以下の議論には数か所の不備がある. 適切に修正したものを述べよ (修正版を書いたうえで, 議論の不備がある箇所に印または説明をつけること).

議論: $f \in C^\infty(M_2)$ を任意にとる. 以下を示せばよい:

$$\boxed{\text{示すこと}}\ ((d\varphi)_p(\eta_1 + \eta_2))(f) = ((d\varphi)_p(\eta_1) + (d\varphi)_p(\eta_2))(f).$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= ((d\varphi)_p(\eta_1 + \eta_2))(f) \\
&= ((\eta_1 + \eta_2) \circ \varphi^*)(f) \quad (\because\ \text{全微分の定義}) \\
&= (\eta_1 + \eta_2)(\varphi^*(f)) \quad (\because\ \text{写像の合成の定義}) \\
&= \eta_1(\varphi^*(f)) + \eta_2(\varphi^*(f)) \quad (\because \eta_1, \eta_2\ \text{の線型性}) \\
&= (\eta_1 \circ \varphi^*)(f) + (\eta_2 \circ \varphi^*)(f) \quad (\because\ \text{写像の合成の定義}) \\
&= ((d\varphi)_p(\eta_1))(f) + ((d\varphi)_p(\eta_2))(f) \quad (\because\ \text{全微分の定義}) \\
&= ((d\varphi)_p(\eta_1) + (d\varphi)_p(\eta_2))(f) \quad (\because\ \text{線型写像}\ (d\varphi)_p(\eta_1), (d\varphi)_p(\eta_2)\ \text{の和の定義}) \\
&= \text{右辺}.
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ (30 点満点)

$\mathbb{RP}^2$ を二次元射影空間とする．$(O, U, \boldsymbol{u}), (O', V, \boldsymbol{v})$ をそれぞれ

- $O := \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{RP}^2 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq 0\}$, $U := \mathbb{R}^2$,
$$\boldsymbol{u} : O \to U,\ [x_1 : x_2 : x_3] \mapsto \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right),$$
- $O' := \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{RP}^2 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},\ x_3 \neq 0\}$, $V := \mathbb{R}^2$,
$$\boldsymbol{v} : O' \to V,\ [x_1 : x_2 : x_3] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right)$$

と定める．以下, $(O, U, \boldsymbol{u}), (O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{LC}(\mathbb{RP}^2; \mathbb{R}^2)$ を認めてよい．また $\boldsymbol{u} : O \to U$ の逆写像が

$$\boldsymbol{u}^{-1} : U \to O,\ u = (u_1, u_2) \mapsto [1 : u_1 : u_2]$$

であることも認めてよい．

問 12. (10 点) $(O, U, \boldsymbol{u})$ から $(O', V, \boldsymbol{v})$ への座標変換 $\tau_{\boldsymbol{uv}}$ を求めよ．定義域と値域も具体的に求めること．また $p = [1 : 1 : 1] \in O \cap O' \subset \mathbb{RP}^2$ について,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_2}\right)_p \in T_p(\mathbb{RP}^2)$$

をそれぞれ $\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right)_p$ の一次結合で書き下せ．

学籍番号：____________________ 氏名：____________________

問 13. (10 点) $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 上の関数 f を

$$f : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R},\ [x_1 : x_2 : x_3] \mapsto \frac{x_2^2}{2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2}$$

と定める．f が well-defined であることを示せ．また U 上の関数 $f_{\boldsymbol{u}}$ を求めよ．

問 14. (10 点) 以下, 講義で定めた要領で $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 上の極大 C^∞-atlas $\mathcal{A}$ を定め, n 次元 C^∞ 級多様体とみなす ($(O, U, \boldsymbol{u}), (O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{A}$ であることに注意). 写像

$$\varphi : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2,\ [x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [x_1 + x_2 : x_1 + x_2 : 2x_3]$$

について考える. φ が well-defined であり, C^∞ 級写像であるということは認めてよい. $p = [1 : 1 : 1] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ に対し, 線型写像 $(d\varphi)_p : T_p(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \to T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$ の階数を求めよ.

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{5}$ (10 点満点)

$M = (M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とし, $f \in C^\infty(M)$, $p \in M$ とする．また $f(p)$ は関数 f の最大値であるとする．すなわち

$$f(p) = \max\{f(x) \mid x \in M\}$$

とする．このとき任意の $\eta \in T_pM$ について, $\eta(f) = 0$ となることを示せ (Hint: 解析の講義などで履修する内容は用いてよい).

$\boxed{6}$ (30 点満点)

$X := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 x_4 - x_2 x_3 = 1\}$ とおく.

問 15. (10 点) X が $\mathbb{R}^4$ の 3 次元正則部分多様体の構造を持つことを示せ.

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問 16. (20 点) 各 $p = (1, 0, 0, 1) \in X$ について,

$$T_p\mathbb{R}^4 = \left\{ \sum_{i=1}^{4} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \;\middle|\; a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

の部分空間 T_pX を決定せよ (定義方程式を決定するか, 基底を具体的に一組求めよ).