講義全体の流れ

Part I : 多変数の微分論を代数的に捉える.

Part II : 可微分多様体の定義, 構成

Part III : 可微分多様体上の各種概念

注意 : Part I が最も難しい

Part II は ひたすら ややこしい.

時間をかけないと頭に入らない

Part III は Part I, Part II が頭に入っていれば難しくない

Part I の概要を紹介しておく.

Part I でやること

① 代数としての関数空間

② 方向微分の代数的定義 ⇝ 接空間

③ C^∞級写像の代数的定義

④ 全微分の代数的定義

①　$U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とする.

このとき

$C^\infty(U) := \{ f : U \to \mathbb{R} \mid C^\infty$級関数$\}$

は（無限次元）$\mathbb{R}$代数

ベクトル空間かつ環.

② $U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $p \in U$ とする.

各 $v \in \mathbb{R}^n$ について

$v_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f$ の p における v 方向微分

とおく.

v_p は 線型写像であり,

ライプニッツ則 "$v_p(f \cdot g) = v_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v_p(g)$" を満たす.

$$T_pU := \left\{ \mathcal{D} : C^\infty(U) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{D} \text{ は線型写像 かつ} \\ \mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \mathcal{D}(g) \\ \qquad\qquad {}^\forall f, g \in C^\infty(U) \end{array} \right\}$$

とおく.

T_pU は n 次元ベクトル空間となり,

$\Phi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_pU$ は線型同型

証明はムズかしい…

つまり, T_pU は"方向微分"を代数的に定式化したもの.

③ $U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$, $V \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$, $\varphi : U \to V$: 写像

<u>Thm</u> φ は C^∞級写像

$\iff$ $\forall f \in C^\infty(V)$, $f \circ \varphi \in C^\infty(U)$

(φ は代数準同型 $C^\infty(V) \to C^\infty(U)$ を定めよ)
$f \mapsto f \circ \varphi$

④

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m \\ \text{open} \cup & & \cup \ \text{open} \\ U & \xrightarrow[C^\infty\text{級}]{\varphi} & V \end{array}$$

$p \in U$ とする.

Def

$$(d\varphi)_p : T_pU \to T_{\varphi(p)}V$$

$$\eta \longmapsto (d\varphi)_p\eta : C^\infty(V) \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \eta(f\circ\varphi)$$

を φ の p における全微分とよぶ.

Thm

$$\begin{tikzcd}
T_pU \arrow[r, "(d\varphi)_p"] \arrow[d, "\wr", "\Phi_{p,U}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & T_{\varphi(p)}V \arrow[d, "\wr"', "\Phi_{\varphi(p),V}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "(J\varphi)_p"'] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

φ の p におけるヤコビ行列