Section 2 : $\mathbb{R}$代数

意義 : "微分論"を代数的に捉える
ための言葉の準備

Part I : 多変数の微分論の代数化

Section 2 $\mathbb{R}$代数 ㊙

3 C^∞級関数

4 方向微分

5 写像の微分

内容

- $\mathbb{R}$代数の定義
- 関数のなす$\mathbb{R}$代数
- 線型作用素のなす$\mathbb{R}$代数
- $\mathbb{R}$代数の各種性質

Section 2.1 : $\mathbb{R}$代数の定義と例

Def 2.1.1 (双線型写像)

V_1, V_2, W を実ベクトル空間とする.

写像 $F : V_1 \times V_2 \to W$ が双線型

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ F は第一, 第二変数それぞれについて線型

i.e. ① $^\forall b \in V_2$, $F^b : V_1 \to W$, $a \mapsto F(a, b)$ が線型

② $^\forall a \in V_1$, $F_a : V_2 \to W$, $b \mapsto F(a, b)$ が線型

Def 2.1.2 ($\mathbb{R}$代数)

Vを実ベクトル空間とする.

V上の二項演算(積と呼ぶ)

$$V \times V \to V,\ (a, b) \mapsto a \cdot b$$

をfix.

$(V, \cdot)$が$\mathbb{R}$代数

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ "$\cdot$"が双線型

Ex 2.1.3 $\mathbb{R}$は通常の積について$\mathbb{R}$代数

この講義では以下の形のベクトル空間がよく現れる。

S を集合、W を実ベクトル空間とする。

S から W への写像（W 値関数）全体の集合を

$$W^S := \{ f : S \to W \}$$ と書く。

Prop 2.1.4：W^S は以下の関数の和、関数のスカラー倍により実ベクトル空間となる：

和：各 $f, g \in W^S$ について $f \underset{\substack{\uparrow \\ W^S\text{の和}}}{+} g : S \to W,\ x \mapsto f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ W\text{の和}}}{+} g(x)$

スカラー倍：各 $f \in W^S$, $\lambda \in \mathbb{R}$ について $\underset{\substack{\uparrow \\ W^S\text{のスカラー倍}}}{\lambda \cdot f} : S \to W,\ x \mapsto \underset{\substack{\uparrow \\ W\text{のスカラー倍}}}{\lambda \cdot f(x)}$

㊟ 関数の和，関数のスカラー倍の定義についての注意

重要！

「何が“入力”で何が“出力”か？」を意識する．

	入力	出力
S上のW値関数	Sの元	Wの元
関数の和	2つのS上のW値関数	S上のW値関数
関数のスカラー倍	S上のW値関数とRの元	S上のW値関数

これ自体が入力と出力を持っている

Remark　@ $S=\emptyset$ のときは $\mathbb{R}^S=\{0\}$ と考えてよい.

@ W^S は "W の S 回直積" と呼ぶべきものである
がここでは深入りしない

@ W が有限次元, S が有限集合のとき

$$\dim W^S = \dim W \times \# S$$

しかしこの講義では

$\dim W$, S の有限性は仮定しない.

$\mathbb{R}$代数の重要例その1：

Ex 2.1.5（関数のなす代数）

Sを集合とする．S上の実数値関数のなすベクトル空間

$$\mathbb{R}^S := \{ f : S \to \mathbb{R} \}$$

は以下の"各点ごとの積"について$\mathbb{R}$代数となる．

積：各$f, g \in \mathbb{R}^S$について

$$f \cdot g : S \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

$\mathbb{R}^S$の積

$\mathbb{R}$の積

もう一つ重要な例を紹介する.

以下はその準備:

Prop 2.1.6: V, W を実ベクトル空間とする.

このとき線型写像の集合

$$\mathcal{L}(V, W) := \{ f : V \to W \mid f \text{ は線型} \}$$

は W^V (Prop 2.4 の意味で実ベクトル空間とみなす)

の線型部分空間

$\mathbb{R}$代数の重要例その2：

Ex 2.1.7（線型作用素のなす$\mathbb{R}$代数）

Vを実ベクトル空間とする。

$\mathrm{End}(V) := \mathcal{L}(V, V)$とおく。

$\mathrm{End}(V)$の元をV上の線型作用素と呼ぶ。

$\mathrm{End}(V)$は写像の合成について$\mathbb{R}$代数となる。

Section 2.1 終

Section 2.2: 部分$\mathbb{R}$代数，$\mathbb{R}$代数準同型

Def 2.2.1 (部分$\mathbb{R}$代数)

$(V, \cdot)$ を$\mathbb{R}$代数，W を V の線型部分空間とする.

W が $(V, \cdot)$ の部分$\mathbb{R}$代数

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ W は "$\cdot$" について閉じる.

(i.e. $\forall a, b \in W$, $a \cdot b \in W$)

Prop 2.2.2: 部分$\mathbb{R}$代数は$\mathbb{R}$代数

Ex 2.2.3 : S を位相空間とする.

$$C(S) := \{ f : S \to \mathbb{R} \mid f \text{は連続} \} \subset \mathbb{R}^S$$

は $\mathbb{R}^S$ (Ex 2.5 の意味で $\mathbb{R}$ 代数) の部分 $\mathbb{R}$ 代数.

特に $C(S)$ は $\mathbb{R}$ 代数.

Prop 2.2.4:

$(V, \cdot)$ を $\mathbb{R}$代数とし,

$\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を V の部分$\mathbb{R}$代数の族とする.

このとき $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ は V の部分$\mathbb{R}$代数

Ex 2.2.5 　S を位相空間とする.

各 $f \in \mathbb{R}^S$ について

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in S \mid f(x) \neq 0\}} \subset S$$

← S における閉包

とおく.

このとき $\{f \in \mathbb{R}^S \mid \operatorname{supp} f$ は compact$\}$ は

$\mathbb{R}^S$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数

特に $C_c(S) := C(S) \cap \{f \in \mathbb{R}^S \mid \operatorname{supp} f$ は compact$\}$

は $\mathbb{R}^S$ の (また $C(S)$ の) 部分 $\mathbb{R}$ 代数

Def 2.2.6（$\mathbb{R}$代数準同型："$\mathbb{R}$-alg hom" と書く）

$(V, \cdot_V)$, $(W, \cdot_W)$ をそれぞれ $\mathbb{R}$代数とする.

線型写像 $\varphi : V \to W$ が $\mathbb{R}$代数準同型
$\mathbb{R}$-alg. hom

$$\underset{\text{def}}{\iff} \forall a, b \in V, \quad \varphi(a \cdot_V b) = \varphi(a) \cdot_W \varphi(b)$$

$\cdot_V$：Vでの積

$\cdot_W$：Wでの積

Ex. 2.2.7 : S : 集合, $p \in S$ とする.

$$\mathrm{ev}_p : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ex 2.1.5}}}{\mathbb{R}^S} \to \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ex 2.1.3}}}{\mathbb{R}}, \quad f \mapsto f(p)$$

は $\mathbb{R}$ alg hom

Ex 2.2.8 S_1, S_2 をそれぞれ位相空間

$\varphi : S_1 \to S_2$ を連続写像とする.

このとき

φによる引き戻し

$$\varphi^* : C(S_2) \to C(S_1), \quad f \mapsto f \circ \varphi$$

は $\mathbb{R}$ alg hom.

Section 2.2 終

Section 2.3 : $\mathbb{R}$代数の各種性質

$(V, \cdot)$: $\mathbb{R}$代数とする.

Def 2.3.1

- $(V, \cdot)$ が結合的 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ $(\forall a, b, c \in V)$

- $(V, \cdot)$ が単位的 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 単位元が存在

  ("$a\cdot 1_V = 1_V\cdot a = a$ $(\forall a \in V)$" となる $1_V \in V$ のこと)

- $(V, \cdot)$ が可換 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $a\cdot b = b\cdot a$ $(\forall a, b \in V)$

Prop 2.3.2 : 結合性, 可換性 は 部分 $\mathbb{R}$ 代数 に 遺伝する.

"単位的であるという性質" は 遺伝するとは限らない

Ex 2.3.3 : S を 位相空間 とする.

$\mathbb{R}^S$ は 結合的, 可換, 単位的

$\cup$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

$C(S)$ は 結合的, 可換, 単位的

$\cup$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

$C_c(S)$ は 結合的, 可換,

$C_c(S)$ が 単位的 $\Leftrightarrow$ S が compact

Ex 2.3.4

$\mathrm{End}(V)$ （Ex 2.1.7 の意味で $\mathbb{R}$ 代数）は

結合的 かつ 単位的.

また 可換 $\Leftrightarrow$ $\dim V \leq 1$.

Ex 2.3.5 : $(V, \cdot)$ を結合的 $\mathbb{R}$ 代数とする.

V 上の二項演算 $[\ ,\ ]$ (bracket 積) を

$$[a, b] := a \cdot b - b \cdot a \quad (a, b \in V)$$

と定める.

このとき $(V, [\ ,\ ])$ は $\mathbb{R}$ 代数.

この $(V, [\ ,\ ])$ は一般には

結合的でも単位的でも可換でもない.

(Lie 代数と呼ばれるものになる)

Section 2.3 終