Section 3：1変数 C^∞ 級関数

意義："C^∞ 級関数のなす $\mathbb{R}$ 代数" を定義する．
この代数の言葉で1変数の微分論を書き直すのが当面の目標．

Part I：1変数の微分論の代数化

Section 2 $\mathbb{R}$ 代数
3 C^∞ 級関数 ㊍
4 方向微分
5 写像の微分

内容 ◎ ユークリッド空間の開集合上の
C^∞級関数の定義

◎ C^∞級関数の各種構成

◎ C^∞級関数のなす$\mathbb{R}$代数

◎ 芽と茎　試験範囲外

Section 3.1 : C^∞ 級関数の定義

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

└ $U \subset \mathbb{R}^n$: 開集合

（$n=0$ のとき $\mathbb{R}^0$ は一点集合なのであまり面白くない
以下 $n \geq 1$ を想定して構わない）

記号 :

└ $e_1, \cdots, e_n$: $\mathbb{R}^n$ の標準基底

U 上の C^∞ 級関数の定義を復習する.

Def 3.1.1: $f : U \to \mathbb{R}$ が U 上 C^0 級

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f は U 上連続

Def 3.1.2: $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする.

$f : U \to \mathbb{R}$ が U 上 C^k 級

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $U = \emptyset$ または $U \neq \emptyset$ で以下が成り立つ:

各 $i = 1, \cdots, n$ について

偏導関数

$\mathbb{R}^n$ の和

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{R},\ p \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{f(p + he_i) - f(p)}{h}$$

が well-defined であり, 更に U 上 C^{k-1} 級

(帰納的定義)

Prop 3.1.3: C^k級 $\Rightarrow$ C^{k-1}級 $(^\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$

Remark これは $k=1$ の場合が本質的

C^1級 $\Rightarrow$ 全微分可能 $\Rightarrow$ C^0級

すごいことを言っている

解析の講義を復習して欲しい

Def 3.1.4: $f: U \to \mathbb{R}$ が U 上 C^∞ 級

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, f は U 上 C^k 級

Prop 3.1.5 : $U \underset{\text{open}}{\subset} V \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とする.

$\forall k = 0, 1, \cdots, \infty$, $\forall f : V \to \mathbb{R} : C^k$ 級

$f|_U : U \to \mathbb{R}$, $u \mapsto f(u)$ は C^k 級

Section 3.1 終

Section 3.2 : C^∞級関数の各種構成

Prop 3.2.1: n 変数多項式関数は $\mathbb{R}^n$ 上 C^∞ 級

Prop 3.2.2: $\alpha \in \mathbb{R}$ とする.

$$\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha$$

は $\mathbb{R}_{>0}$ 上 C^∞ 級

この関数の定義はまったく自明でない事に注意.

Prop 3.2.3 : $\underset{\text{open}}{U \subset} \mathbb{R}^n$, $\underset{\text{open}}{V \subset} \mathbb{R}$ とし,

$g : U \to \mathbb{R}$, $h : V \to \mathbb{R}$: C^∞級関数とする.

このとき

$$f := h \circ g : \underbrace{U \cap g^{-1}(V)}_{\mathbb{R}^n \text{ の open set}} \to \mathbb{R}$$ は

$U \cap g^{-1}(V)$ 上 C^∞ 級

Ex 3.2.4 $U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^n$ とする. (open ball)

このとき $f : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}$

は U 上 C^∞ 級

Proof : $g : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 - \sum_{i=1}^n x_i^2$ は

多項式関数なので C^∞-級 ($\because$ Prop 3.2.1)

また $h : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ は C^∞-級 ($\because$ Prop 3.2.2)

U と g の定義から $g^{-1}(\mathbb{R}_{>0}) = U$ に注意すると

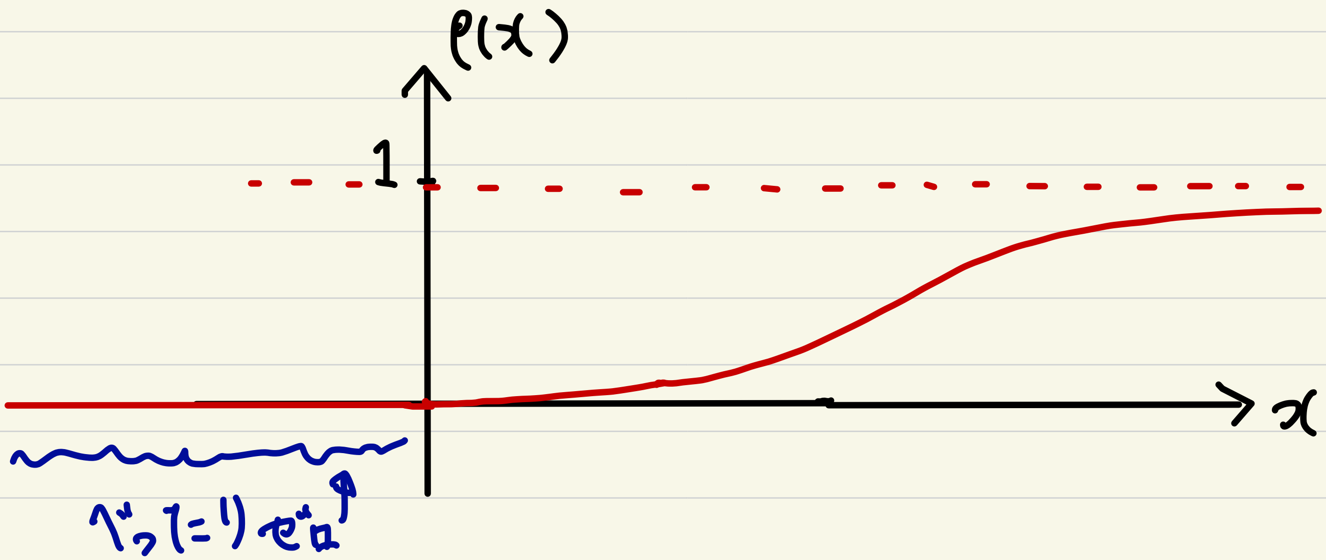
$f = h \circ g : \underset{U \cap g^{-1}(\mathbb{R}_{>0})}{\overset{\shortparallel}{U}} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}$ は U 上 C^∞-級

($\because$ Prop 3.2.3)

Ex 3.2.5

$$\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (\text{if } x > 0) \\ 0 & (\text{if } x \leq 0) \end{cases}$$

は $\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級



Remark : C^∞ 級であってもテイラー展開可能とは限らない.

次の定理は Section 3.4 で用いる.

Theorem 3.2.6

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $p \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 < r_2$ とする.

このとき C^∞ 級関数 $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ であって

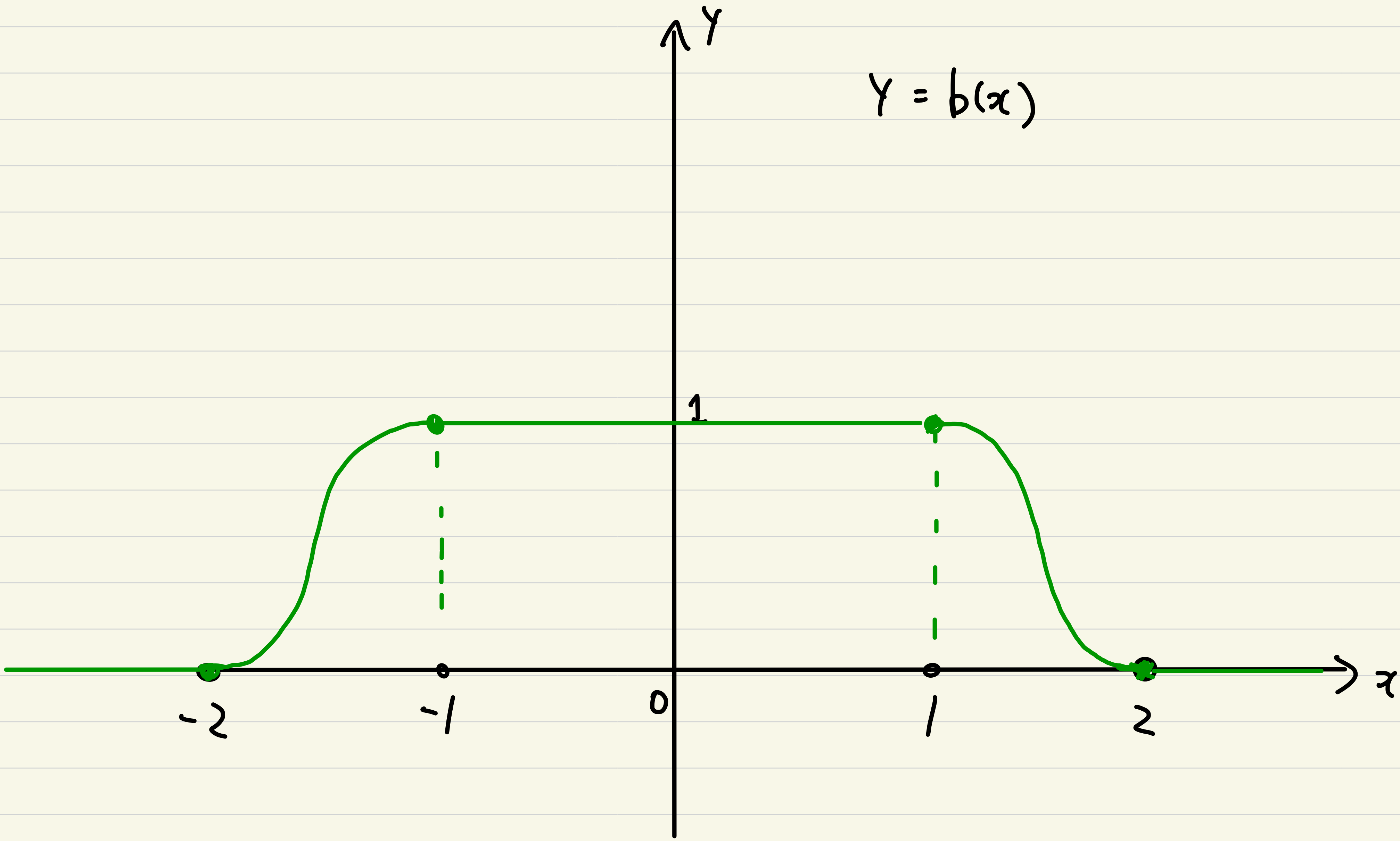
以下を満たすものが存在する.

(i) $b(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ with $\|x - p\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - p_i)^2} \leq r_1$

(ii) $b(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ with $\|x - p\| \geq r_2$ $\rightsquigarrow$ supp b は compact cf. Ex 2.2.5

(Remark : $\mathbb{C}$ 上の正則関数 f が "supp f は compact" を満たすなら $f \equiv 0$ (Liouville の定理) (複素解析で習う))

$n=1,\ p=0,\ r_1=1,\ r_2=2$ の場合のイメージ



Thm 3.2.6 の証明の Hint:

Recall: $\rho: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & (t > 0) \\ 0 & (t \leqq 0) \end{cases}$

は $\mathbb{R}$ 上 C^∞-級 (Ex 3.2.5)

$$b: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \frac{\rho(r_2 - \|x-p\|)}{\rho(\|x-p\| - r_1) + \rho(r_2 - \|x-p\|)}$$

とおけば OK.

Section 3.2 終

Section 3.3 : C^∞級関数のなす $\mathbb{R}$ 代数

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$U \subset \mathbb{R}^n$: 開集合

記号 : $C(U)$: U 上の $\mathbb{R}$ 値連続関数全体のなす $\mathbb{R}$ 代数

(cf. Ex. 2.10)

以下の様に記号を定める.

Def 3.3.1:

$$C^k(U) := \{ f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{は} C^k \text{級} \} \subset C(U)$$

$$(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

$$C^\infty(U) := \{ f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{は} C^\infty \text{級} \} = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U) \subset C(U)$$

重要

Theorem 3.3.2: $^\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$C^k(U)$ は $C(U)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数

(証明の要点をすぐ後で述べる)

Cor 3.3.3: $C^\infty(U)$ は $C(U)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数

特に $C^\infty(U)$ は $\mathbb{R}$ 代数.

$$\left(\because\ C^\infty(U) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U),\quad \text{Thm 3.3.2, Prop 2.2.4 and 2.2.2} \right)$$

Thm 3.3.2 の証明の要点：以下の命題を用いて

k についての帰納法で示す。

Prop 3.3.4：$k \geq 1$, $i = 1, \cdots, n$ とし、

$f, g \in C^k(U)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする。

このとき $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i}$ は U 上 well-defined で

(つまり $\mathbb{R}^U$ の元)

以下の等式が成り立つ：

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

(ライプニッツ則)

$C(U)$ における積

図

Cor 3.3.3 と Prop 3.3.4 から次も得られる.

Prop 3.3.5 : $k=1,\cdots,\infty$ とする. 各 $i=1,\cdots,n$ について

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : C^k(U) \to C^{k-1}(U),\ f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

(ただし $k=\infty$ のときは $k-1=\infty$ とみなす)

は線型で, 以下のライプニッツ則を満たす

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f\cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot g + f\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i} \quad ({}^\forall f, g \in C^k(U))$$

$C^{k-1}(U)$ における積

以下の点は注意が必要

Prop 3.3.6 : $n \geq 1$ とし, $U \neq \emptyset$ とする.

このとき $C^\infty(U)$ は実ベクトル空間として無限次元

（有限基底は存在しない）

証明のアイディア

bold体のつもり

$\boldsymbol{x}_1 : U \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_1$ とおく （$U \subset \mathbb{R}^n$）

（この講義では "座標関数" は bold体の記号で表す）

任意の $N \in \mathbb{N}$ について

「$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_1^N \in C^\infty(U)$ は一次独立」を示せば十分

多項式 (cf. Prop 3.2.1)

確認せよ

"線型作用素 $\frac{\partial}{\partial x_1}$ を何回か当ててみる" と示せる.

Section 3.3 終

Section 3.4: 考と答

試験範囲外

設定: $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Question: $\emptyset \neq U' \underset{\text{open}}{\subset} U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とする.

$C^\infty(U')$ と $C^\infty(U)$ の関係は?

Answer: $C^\infty(U)$ から $C^\infty(U')$ への自然な

$\mathbb{R}$ 代数準同型である.

これは一般には単射でも全射でもない

(が "局所的には同型である")

$U \subset \mathbb{R}^n$: 空ではない開集合

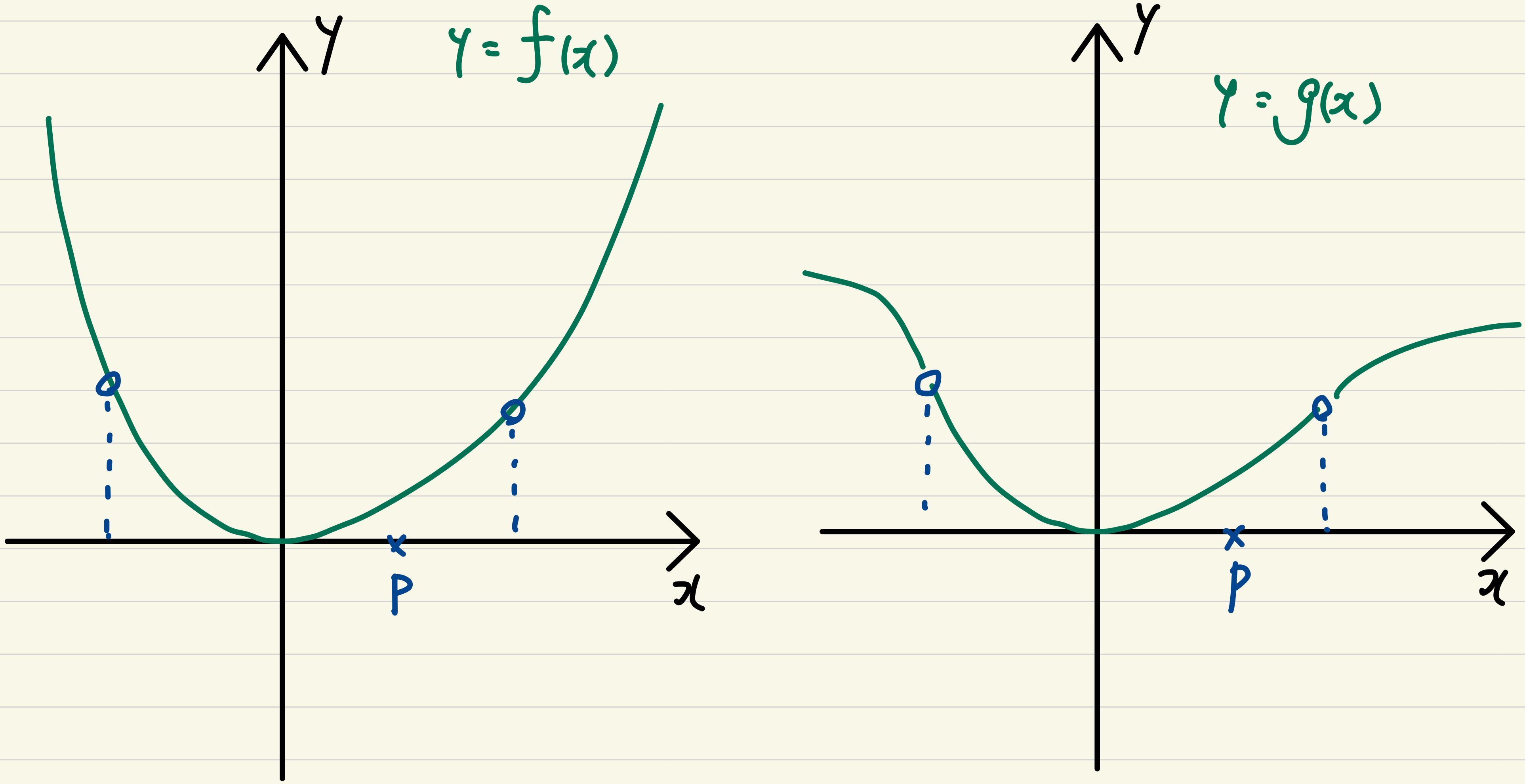
$p \in U$ とする.

Def 3.4.1 : $C^\infty(U)$ 上の二項関係 $\sim_p$ を各 $f, g \in C^\infty(U)$ に対して

$$f \sim_p g \overset{\text{def}}{\iff} {}^\exists V : p \text{ の開近傍 in } U \text{ s.t. } f|_V = g|_V$$

と定める.

Prop 3.4.2 : $\sim_p$ は $C^\infty(U)$ 上の同値関係



$\sim_p$ の意味：p のまわりで同じ

Def 3.4.3 各 $f \in C^\infty(U)$ について f の $\sim_p$ による同値類を

$$[f]_p := \{ g \in C^\infty(U) \mid f \sim_p g \} \subset C^\infty(U)$$

と定める.

$[f]_p$ を f の p における芽 (germ) と呼ぶ

Theorem 3.4.4 商集合 $C^\infty_p(U) := C^\infty(U)/\sim_p$ には

商写像 $C^\infty(U) \to C^\infty_p(U)$ が $\mathbb{R}$ 代数準同型

となるような $\mathbb{R}$ 代数の構造が一意に定まる。

i.e.

和 $$[f]_p + [g]_p = [f+g]_p$$

スカラー倍 $$\lambda [f]_p = [\lambda f]_p \qquad \left(\begin{array}{c} f, g \in C^\infty(U) \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

積 $$[f]_p \cdot [g]_p = [f \cdot g]_p$$

は $C^\infty_p(U)$ 上 well-defined で $\mathbb{R}$ 代数の構造を定めている

Def 3.4.5 : $\mathbb{R}$ 代数 $C_p^\infty(U)$ を （$C^\infty(U)$ において p のまわりの局所的な情報をみている.）

$C^\infty(U)$ の p における茎 (stark) と呼ぶ

Remark : よく勉強している人向け注意.

この講義では "層" の概念は

(定義が大変なので) 表に出さない.

上記 stark の定義は

"C^∞ 級関数の層の p における stark"

と結果的に同じものとみなせる

この節の後半も見よ.

Prop 3.4.6 各 $i = 1, \cdots, n$ について

$C^\infty(U)$ 上の線型作用素 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ (cf. Prop 3.3.5)

は $C_p^\infty(U)$ 上の線型作用素を誘導する.

(i.e. $C_p^\infty(U) \to C_p^\infty(U), [f]_p \mapsto \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]_p$

は well-defined で, 線型写像.)

Prop 3.4.7 $n \geq 1$ とする.

このとき $C_p^\infty(U)$ はベクトル空間として無限次元

(Hint : 多項式関数を考えよ)

以下, $U' \subset U \subset \mathbb{R}^n$: 空でない開集合とする.

Prop 3.4.8 :

制限 $\mathrm{rest}^U_{U'} : C^\infty(U) \to C^\infty(U'),\ f \mapsto f|_{U'}$
は well-defined であり, $\mathbb{R}$ 代数準同型

(cf. Ex 2.2.8 と関係あり
Prop 3.1.5)

Prop 3.4.9 : $\mathrm{rest}^U_{U'} : C^\infty(U) \to C^\infty(U')$ は単射とは限らない

全射とも限らない

例① : $U = \mathbb{R}$, $U' = (-\infty, 0)$ とする.

U 上のゼロ関数 O_U と Ex 3.2.5 の ρ を考える.

このとき $O_U \neq \rho$ on U だが

$$(O_U)|_{U'} = \rho|_{U'} = \text{ゼロ関数 on } U'$$

例② : $U = \mathbb{R}^2$, $U' = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とする.

原点を気にしなくてよい

$g : U' \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ とおくと $g \in C^\infty(U')$

しかし "$f \in C^\infty(U)$ であって $f|_{U'} = g$" となる $f \in C^\infty(U)$

は存在しない. (原点で C^∞ 級に作れない)

$\mathrm{rest}^{U}_{U'}$ は局所的には同型である.

Theorem 3.4.10: $p \in U' (\subset U)$ とする.

$\mathrm{rest}^{U}_{U'} : C^\infty(U) \to C^\infty(U')$ は

$C^\infty_p(U)$ から $C^\infty_p(U')$ への $\mathbb{R}$ 代数同型を

誘導する.

i.e. $C^\infty_p(U) \to C^\infty_p(U'),\ [f]_p \mapsto [f|_{U'}]_p$

は well-defined, $\mathbb{R}$ 代数準同型, 全単射

(特に全射性は簡単でない)

Thm 3.4.10: 全射性の証明の概略

任意に $g \in C^\infty(U')$ をとる。

示 $\exists f \in C^\infty(U)$ s.t. $f|_{U'} \sim_p g$

(示すべき事)

実数 $r > 0$ を $\underset{p\text{の}r\text{開近傍}}{U_r(p)} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-p\| < r\}$

$\subset U'$ となるようにとる。

(U' は open in $\mathbb{R}^n$ なので このような $r>0$ が存在)

$r_1 = \frac{1}{3}r$, $r_2 = \frac{2}{3}r$ として

定理 3.2.6 の $b \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ をとる。

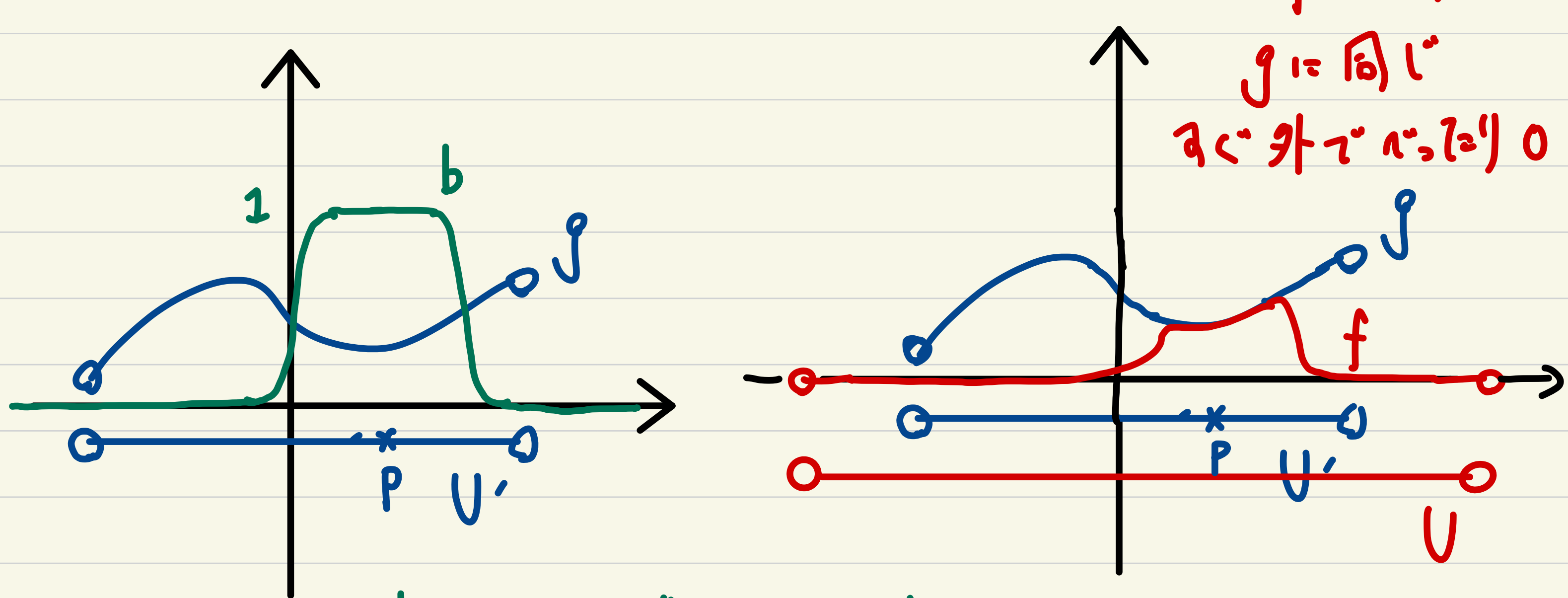
つづき

ここで $f : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} b(x) \cdot g(x) & (\text{if } x \in U') \\ 0 & (\text{if } x \notin U') \end{cases}$

と定める.

このとき $f \in C^\infty(U)$ が確認できる.

$n=1$ の場合のイメージ



b は p のまわりでぴったり 1
すぐ外でぴったり 0

フブマ

この $f \in C^\infty(U)$ について

$f|_{U'} \sim_p g$ を示せばよい.

b と f の定義より

$\mathcal{U}_{\frac{1}{3}r}(p)$ 上で f と g は等しい

$\subset U'$

これより $f|_{U'} \sim_p g$ □

$p \in \mathbb{R}^n$ を固定したとき

"$C_p^\infty(U)$ は p の開近傍 U のとり方に依らない"

つまり以下が成り立つ：

U_1, U_2 を p の開近傍としたとき

$$C_p^\infty(U_1) \xrightarrow[\mathrm{rest}^{U_1}_{U_1 \cap U_2}]{\sim} C_p^\infty(U_1 \cap U_2) \xleftarrow[\mathrm{rest}^{U_2}_{U_1 \cap U_2}]{\sim} C_p^\infty(U_2)$$

により, $C_p^\infty(U_1)$ と $C_p^\infty(U_2)$ は自然に同型.

Section 3.4 終