Section 4：方向微分

意義：“C^∞級関数のなす$\mathbb{R}$代数”の言葉を用いて方向微分を代数的に特徴付ける.

Part I：多変数の微分論の代数化

Section 2 $\mathbb{R}$代数

3 C^∞級関数

4 方向微分

5 写像の微分

内容

◎ 方向微分の定義，各種性質

◎ 接ベクトルの定義，局所性

試験範囲外

◎ 方向微分 = 接ベクトル

代数的に定義される.

"⊐" の証明は 試験範囲外

Section 4.1 : 方向微分の定義，性質

設定： $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$: 開集合

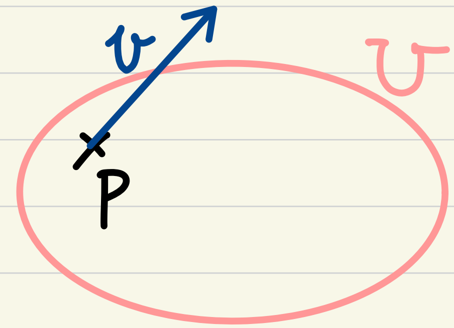
$n=0$ のときはあまり意味がない．$n \geq 1$ を仮定してよい

記号： $\{e_1, \cdots, e_n\}$: $\mathbb{R}^n$ の標準基底

$C^\infty(U)$: U 上 $\mathbb{R}$ 値 C^∞ 級関数全体のなす $\mathbb{R}$ 代数

(cf. Section 3.3)

方向微分の定義を復習する.



Def 4.1.1: 点 $p \in U$, ベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ とする.

各 $f \in C^\infty(U)$ について

$$v_p(f) := \lim_{h \to 0} \frac{f(p+hv) - f(p)}{h} \in \mathbb{R}$$

と定める. （p における f の v 方向微分）

Prop 4.1.2: Def 4.1.1の設定で $v_p(f) \in \mathbb{R}$ は well-defined

（$U \subset \mathbb{R}^n$: open が重要）

また $v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ （$a_i \in \mathbb{R}$） とおくと

$$v_p(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

となる.

（C^1級でok ; まったく自明でないので各自解析を復習して欲しい）

$p \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$ を固定する.

写像 $v_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto v_p(f)$

について考える.

Prop 4.1.3:

$v_p : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ は線型写像

Hint: $f, g \in C^\infty(U)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ を任意にとる.

$C^\infty(U)$ の和　　　$\mathbb{R}$ の和

示 $\begin{cases} v_p(f+g) = v_p(f) + v_p(g) \\ v_p(\lambda f) = \lambda v_p(f) \end{cases}$

$\mathbb{R}$ の積

$C^\infty(U)$ のスカラー倍

Prop 4.1.4 $\forall f, g \in C^\infty(U)$,

(pにおけるライプニッツ則)

$$\underbrace{v_p(f \cdot g)}_{C^\infty(U)\text{の積}} = \overbrace{v_p(f)} \cdot \overbrace{g(p)} + \overbrace{f(p)} \cdot \overbrace{v_p(g)}$$

$\mathbb{R}$の元

$\mathbb{R}$の積

Section 4.2 以降では、"pにおけるライプニッツ則"を用いてpでの方向微分を特徴付ける.

後々のため以下の記号を準備しておく

Def. 4.1.5：各 $i=1,\cdots,n$、各 $p\in U$ について

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : C^\infty(U)\to\mathbb{R},\ f\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

Prop 4.1.6：各 $i=1,\cdots,n$、各 $p\in U$ について

$$(e_i)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p .$$

$\{e_1,\cdots,e_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底

Section 4.1 終

Section 4.2：接ベクトルの定義

設定：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$U \subset \mathbb{R}^n$：open

$p \in U$　← 点pも固定

記号：$C^\infty(U)$：U上$\mathbb{R}$値C^∞級関数全体のなす$\mathbb{R}$代数（cf. Section 2.3）

$\mathcal{L}(C^\infty(U), \mathbb{R}) := \{ g : C^\infty(U) \to \mathbb{R} \mid g は線型 \}$

← Prop 2.1.6の意味でベクトル空間

$\mathcal{L}(C^\infty(U), \mathbb{R})$の元を$C^\infty(U)$上の（線型）汎関数とよぶ
（はんかんすう）

Def 4.2.1 : 線型汎関数 $y : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ が

$p \in U$ におけるライプニッツ則を満たす

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall f, g \in C^\infty(U)$,

$\mathbb{R}$の元

$$y(f \cdot g) = y(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot y(g)$$

$C^\infty(U)$の積

$\mathbb{R}$の積

以下の様に記号を定める：

$g : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$; 線型

Def. 4.2.2 : $T_pU := \{ g \in \mathcal{L}(C^\infty(U), \mathbb{R}) \mid g$ は p における ライプニッツ則 を満たす $\}$

U の p における **接空間**

T_pU の元を U の p における **接ベクトル** という.
(tangent vector)

後で「方向微分 = 接ベクトル」を示す.

Prop 4.2.3 : 各 $v \in \mathbb{R}^n$ について $v_p \in T_pU$

pにおける v 方向微分

(cf. Prop 4.1.3 and 4.1.4)

Question : 方向微分以外に T_pU の元はあるか?

Answer : 実は存在しない!

(i.e. $T_pU = \{ v_p \mid v \in \mathbb{R}^n \}$)

$\rightsquigarrow$ 方向微分は"線型性"と"ライプニッツ則"で代数的に特徴付けられる!

($C^\infty(U)$ さえ覚えておけば、U の入れ物である $\mathbb{R}^n$ を忘れてもよい)

Section 4.2 終

Section 4.3: 方向微分と接ベクトル

この節の目標

「方向微分 = 接ベクトル」を定式化

(証明は Section 4.4 & 4.5)

少し準備:

Prop 4.3.1: T_pU は $\mathcal{L}(C^\infty(U), \mathbb{R})$ の線型部分空間.

特にベクトル空間となる.

和: $\underbrace{\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2}_{\text{汎関数の和}} : C^\infty(U) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \mathcal{D}_1(f) \underbrace{+}_{\mathbb{R}\text{の和}} \mathcal{D}_2(f) \quad (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in T_pU)$

スカラー倍: $\underbrace{\lambda\mathcal{D}}_{\text{汎関数のスカラー倍}} : C^\infty(U) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \lambda \underbrace{\cdot}_{\mathbb{R}\text{の積}} \mathcal{D}(f) \quad (\mathcal{D} \in T_pU, \lambda \in \mathbb{R})$

Def. 4.3.2 : $\Psi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_pU,\ v \mapsto v_p$ とおく.

(Prop 4.2.3 より well-defined)

Prop 4.3.3 : $\Psi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_pU$ は線型写像である.

Hint : 示 : $\Psi_{p,U}$ は和とスカラー倍を保つ

i.e. ① $\forall v, w \in \mathbb{R}^n,\ (v+w)_p = v_p + w_p$ as $C^\infty(U) \to \mathbb{R}$

② $\forall v \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\quad (\lambda v)_p = \lambda v_p$ as $C^\infty(U) \to \mathbb{R}$

① について : $v, w \in \mathbb{R}^n$ を任意にとる.

示 $(v+w)_p = v_p + w_p$

i.e. $\forall f \in C^\infty(U),\quad (v+w)_p f = (v_p + w_p) f$

.... (Prop 4.1.2 を用いる)

Prop 4.3.4 : $\Phi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_pU$ は単射

Proof : Prop 4.3.3 より $\Phi_{p,U}$ は線型写像なので
以下を示せば十分

㊮ $\forall v \in \mathbb{R}^n$ with $v_p = 0$, $v = 0$.

$v_p = 0$ となる $v \in \mathbb{R}^n$ を任意にとる.

$v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ $(a_i \in \mathbb{R})$ とおく. (Recall : $\{e_1 \cdots e_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底)

㊮ $\forall i = 1, \cdots, n$, $a_i = 0$.

$i = 1, \cdots, n$ を任意にとる.

つづき

$x_i : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_i$ とおくと、

$x_i \in C^\infty(U)$ (単項式関数) かつ $V_p(x_i) = a_i$

(by Prop 4.1.2).

いま $V_p = 0$ なので $a_i = V_p(x_i) = 0$.

□

「方向微分 = 接ベクトル」の定式化

Theorem 4.3.5 :

$\Phi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_pU$ は線型同型

特に"全射性"が重要（それ以外はすでに述べた）

Section 4.4 & 4.5 で証明の要点を紹介する.

定理の意義 :

T_pU を"p を始点とするベクトル全体"と思ってよい.

とくに T_pU は $C^\infty(U)$ の言葉で定義されているので"p を始点とするベクトル全体"は

$\mathbb{R}$ 代数 $C^\infty(U)$ から復元できる.

Cor 4.3.6 : $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ は T_pU の基底

(cf. Def. 4.1.5, Prop 4.1.6)

Section 4.3 終

Section 4.4 : 接ベクトルの局所性

試験範囲外

この節では接ベクトルが"局所的"な概念であることを示す.
(Theorem 4.3.5 の証明の準備)

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$U \subset \mathbb{R}^n$: 空でない開集合

$p \in U$

記号 : $C_p^\infty(U) = \{ [f]_p \mid f \in C^\infty(U) \}$

(cf. Section 3.4)

Prop 4.4.1：各 $g \in T_pU$ は

(接ベクトルの局所性)　$\tilde{g} : C_p^\infty(U) \to \mathbb{R},\ [f]_p \mapsto gf$

を誘導する (i.e. $f \sim_p g \Rightarrow g(f) = g(g)$ ($^\forall f, g \in C^\infty(U)$)).

Proof：$g \in T_pU$, $f, g \in C^\infty(U)$ with $f \sim_p g$ を任意にとる.

g は線型なので以下を示せばよい

㊄ $g(f-g) = 0$.

いま $f \sim_p g$ より p の開近傍 U_0 in U であって

$f|_{U_0} = g|_{U_0}$ となるものがとれる.

この U_0 について $\underset{\text{p の r-開近傍}}{U_r(p)} \subset U_0$ となる $r > 0$ を fix.

つづき

$r_1 = \frac{1}{2}r$, $r_2 = r$ として Thm 3.2.6 の $b \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ を1つとる.

つまり $\begin{cases} \|x - p\| < \frac{1}{2}r \Rightarrow b(x) = 1 \\ \|x - p\| \geq r \Rightarrow b(x) = 0 \end{cases}$ を満たす $b \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

を1つ選んだ. $b_U := b|_U \in C^\infty(U)$ とおく.

このとき $b_U \cdot (f-g) = 0_U$ に注意すると

$\uparrow$ U上のゼロ関数

$$
\begin{aligned}
0 = g(0_U) &= g(b_U \cdot (f-g)) \\
&= g(b_U) \cdot \underbrace{(f-g)(p)}_{=0} + \underbrace{(b_U)(p)}_{=1} g(f-g) \\
&= g(f-g)
\end{aligned}
$$

∎

Prop 4.4.2: $\widetilde{ev}_p : C_p^\infty(U) \to \mathbb{R}, [f]_p \mapsto f(p)$

は well-defined で, $\mathbb{R}$ 代数準同型.

Def. 4.4.3:

$$T_p^{\mathrm{stark}} U := \left\{ \xi \in \underbrace{L(C_p^\infty(U), \mathbb{R})}_{C_p^\infty(U) \text{上の汎関数のなすベクトル空間}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \xi(\alpha \cdot \beta) = \xi(\alpha) \cdot \widetilde{ev}_p(\beta) + \widetilde{ev}_p(\alpha) \cdot \xi(\beta) \\ (\forall \alpha, \beta \in C_p^\infty(U)) \end{array} \right\}$$

"$C_p^\infty(U)$ 上のライプニッツ則"

Prop 4.4.4: $T_p^{\mathrm{stark}}(U)$ は $L(C_p^\infty(U), \mathbb{R})$ の線型部分空間

次の定理を次節で用いる.

Theorem 4.4.5 :

$$T_pU \to T_p^{\mathrm{stark}}U,\ \gamma \mapsto \tilde{\gamma}$$

は well-defined で線型同型写像

(証明は難しくはない)

$T_p^{\mathrm{stark}}U$ は T_pU から"定義のムダをそぎ落とした"もの.

$T_p^{\mathrm{stark}}U$ を"接空間"と定義する流儀もある.

Section 4.4 終

Section 4.5 · Theorem 4.3.5 の証明

試験範囲外

Theorem 4.3.5 (再掲) $p \in U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とする.

$\Phi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_pU$ は線型同型

全射性以外は Section 4.3 で扱った.

全射性の証明の流れ：

Step 1 ： U のとり換えについて

Step 2 ： U が凸の場合の証明

Step 3 ： 一般の場合の証明

Step 1 : U のとり換えについて

Step 1 のゴールは次の補題

Lemma 4.5.1 : $p \in U' \subset U \subset \mathbb{R}^n$: p の開近傍とする.

次の2条件は同値

(i) $\Phi_{p,U'} : \mathbb{R}^n \to T_pU'$ が線型同型

$\Updownarrow$

(ii) $\Phi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_pU$ が線型同型

つまり Thm 4.3.5 は必要なら「U を小さくとり換えて」示せば十分

Thm 4.5.1 の証明に向けた準備：

$p \in U' \subset U \subset \mathbb{R}^n$：$p$ の開近傍とする。

Prop 4.5.2

$\Xi : T_pU' \to T_pU,\ \mathfrak{J} \mapsto \mathfrak{J} \circ \mathrm{rest}^U_{U'}$

は well-defined で線型写像

$C^\infty(U) \to C^\infty(U')$
制限写像
(cf. Section 3.4)

Theorem 4.5.3 : $\Xi : T_pU' \to T_pU$ は線型同型写像

(Hint : Thm 3.4.9 and Thm 4.4.5)

このためにがんばって準備した

Prop 4.5.4 : 次の図式は可換 (i.e. $\Phi_{p,U} = \Xi \circ \Phi_{p,U'}$)

$$\begin{tikzcd}
& T_pU' \arrow[d, "\Xi"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "\Phi_{p,U'}"] \arrow[r, "\Phi_{p,U}"'] & T_pU
\end{tikzcd}$$

Proof of Lemma 4.5.1 Thm 4.5.3 と Prop 4.5.4 から従う. ■

Step 2 : U が凸の場合の証明

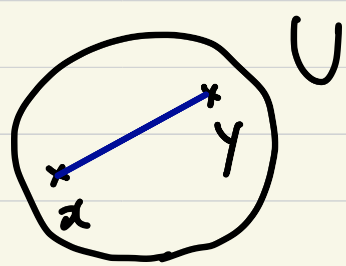
Step 2 のゴールは次の定理

Prop 4.5.5 : $p \in \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$: p の凸開近傍とする.

このとき $\Psi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_pU$ は全射

Recall : • $U \subset \mathbb{R}^n$ が凸 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in U$, $\forall t \in [0,1]$,

$tx + (1-t)y \in U$



Prop 4.5.5 の証明のため、2つの補題を準備する.

Lemma 4.5.6 $p \in U \subset_{\text{open}} \mathbb{R}^n$ とする (U は凸でなくてもよい)

$1_U : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$ (定数関数) とおく.

このとき $1_U \in C^\infty(U)$ で $^\forall v \in T_pU,\ v(1_U) = 0$.

Proof: 1_U は定数関数なので $1_U \in C^\infty(U)$.

$v \in T_pU$ を任意にとる.

示 $v(1_U) = 0$.

$1_U \cdot 1_U = 1_U$ に注意すると,

$$v(1_U) = v(1_U \cdot 1_U) = v(1_U) \cdot 1 + 1 \cdot v(1_U) = 2v(1_U).$$

ライプニッツ則

これより $v(1_U) = 0$ ∎

Lemma 4.5.7 : $p \in U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$: U を凸とする.

$f \in C^\infty(U)$ を固定する.

このとき $G_1^f, \cdots, G_n^f \in C^\infty(U)$ であって

$$\begin{cases} f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} G_i^f(x)(x_i - p_i) & (\forall x \in U) \\ G_i^f(p) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) & (\forall i = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

となるものが存在する.

この補題の証明は簡単でない

積分論が必要（ルベーグ積分論の立場の証明を
このスライドの最後に紹介する）

Proof of Prop 4.5.5

${}^\forall v \in T_p(U)$ をとる.

各 $i = 1, \cdots, n$ について $x_i : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_i$ とおく.

また $a_i := v(x_i) \in \mathbb{R}$ とおく.

示) $\Phi_{p,U}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = v$

i.e. ${}^\forall f \in C^\infty(U)$, $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right)_p f = v(f)$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right)_p f = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

$\forall f \in C^\infty(U)$ をとる.

下 $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = g(f)$

Lemma 4.5.7 より $\quad G_1^f, \cdots, G_n^f \in C^\infty(U)$ であって

$$\begin{cases} f(x) = f(p) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} G_i^f(x)(x_i - p_i) & (\forall x \in U) \\ G_i^f(p) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p) & (\forall i = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

となるものがとれる.

特に $\quad 1_U : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 \quad$ (定数関数) とおくと,

$$f = \underbrace{f(p)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{1_U}_{\in C^\infty(U)} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{G_i^f}_{\in C^\infty(U)} \cdot \left(\underbrace{x_i}_{\in C^\infty(U)} - \underbrace{p_i}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{1_U}_{\in C^\infty(U)} \right) \quad (\text{in } C^\infty(U))$$

と書ける.

従って

$$g(f) = g\Big(f(p)\cdot 1_U + \sum_{i=1}^{n} G_i^f \cdot (x_i - p_i \cdot 1_U) \Big)$$

$$= f(p)\cdot \underbrace{g(1_U)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} g\Big(G_i^f \cdot (x_i - p_i 1_U) \Big)$$

gの線型性

(∵ Lemma 4.5.6)

$$= \sum_{i=1}^{n} g\Big(G_i^f \cdot (x_i - p_i 1_U) \Big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(g(G_i^f)\cdot \underbrace{(x_i(p) - p_i \cdot 1_U(p))}_{= p_i - p_i = 0} + \underbrace{G_i^f(p)}_{=\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)} \cdot \big(\underbrace{g(x_i)}_{=a_i} - p_i \underbrace{g(1_U)}_{=0} \big) \Big)$$

ライプニッツ則
+ 線型性

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

∎

Step 3 : 一般の場合の証明

Proof of Thm 4.3.5

$p \in U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とする.

示 $\Psi_{p,U} : \mathbb{R}^n \to T_pU$ は線型同型

U は開集合 in $\mathbb{R}^n$ なので

$\underbrace{U_r(p)}_{p\text{の}r\text{近傍}} \subset U$ となる $r>0$ が存在する.

つづき　このような $r>0$ を1つ fix し，

pの凸開近傍

$$U' := \mathcal{U}_r(p) \ (\underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n) \text{ とおく．}$$

Lemma 4.5.1 より 次を示せば了

㊟ $\Psi_{p,U'} : \mathbb{R}^n \to T_pU'$ は 線型同型

「全射性」以外は Section 4.3 で扱った．

全射性のみ示せば ok.

㊟ $\Psi_{p,U'} : \mathbb{R}^n \to T_pU'$ は全射

ここで $U' := \mathcal{U}_r(p)$ は凸なので，Prop 4.5.5 より

$\Psi_{p,U'} : \mathbb{R}^n \to T_pU'$ は全射 ■

この証明から以下も分かる.

Prop 4.5.7 $\Phi_{p,U}: \mathbb{R}^n \to T_pU$ の逆写像は

$$\Phi_{p,U}^{-1}: T_pU \to \mathbb{R}^n,\ \gamma \mapsto (\gamma(x_1), \cdots, \gamma(x_n))$$

ただし $x_i: U \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_i$.

特に任意の $\gamma \in T_pU$ について

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p .$$

Section 4.5
終

補足プリント

Lemma A. $U \subset \mathbb{R}^n$ を空でない凸な開集合とし, $p \in U$ を固定する. U 上の C^∞ 級関数 $f : U \to \mathbb{R}$ を考える. このとき, ある U 上の C^∞ 級関数の組 $G_1^f, \ldots, G_n^f : U \to \mathbb{R}$ であって, 以下の条件を満たすものが存在する.

- $f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^n G_i^f(x)(x_i - p_i)$ *for any* $x \in U$.
- $G_i^f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.

Lemma A の証明のアイディア. 各 i について関数 $G_i^f : U \to \mathbb{R}$ を

$$G_i^f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + t(x-p))dt$$

とする (U が凸であることから上記の関数が well-defined となる). このとき $G_i^f : U \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級関数となる (これは非自明な事実である: 詳しくは次ページ以降を参照). 各 $x \in U$ について

$$h_x : [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(p + t(x-p))$$

とすれば

$$\begin{aligned}
f(x) - f(p) &= h_x(1) - h_x(0) \\
&= \int_0^1 \frac{dh_x}{dt}(t)dt \quad (\because \text{ 微積分の基本定理}) \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(h_x(t))(x_i - p_i)dt \quad (\because \text{ 連鎖律}) \\
&= \sum_{i=1}^n (x_i - p_i)(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + t(x-p))dt) \\
&= \sum_{i=1}^n G_i^f(x)(x_i - p_i)
\end{aligned}$$

となるので一つ目の条件を満たす. また

$$G_i^f(p) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)dt = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(\int_0^1 1dt) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

となるから二つ目の条件も満たす. □

$G_i^f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p + tx)dt$ の微分可能性については次ページ以降を参照

証明の中で構成した $G_i^f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(p+tx)dt$ が C^∞ 級であることは以下の一般的な定理から従う (確認せよ):

Theorem B. 開区間 $(a,b)(\subset \mathbb{R})$ と $\mathbb{R}^n$ の開集合 U を固定し, C^1 級関数 $K:(a,b)\times U \to \mathbb{R}$ を考える. また (a,b) に含まれる有界閉区間 I も固定しておく. このとき

$$G : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_{t\in I} K(t,x)dt$$

とすると, $G:U\to\mathbb{R}$ は C^1 級関数となる. また各 $t\in I$ について $K^t : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto K(t,x)$ とおけば, 各 $i=1,\ldots,n$ について

$$\frac{\partial G}{\partial x_i}(x) = \int_{t\in I} \frac{\partial K^t}{\partial x_i}(x)dt \quad \textit{for any } x \in U$$

が成り立つ (つまり偏微分と積分の交換が可能である).

Remark C. *1.* 今回考えている有界閉区間上の積分はリーマン積分と考えてもルベーグ積分と考えても (有界閉区間をルベーグ測度によって測度空間と見なしている) 同じである. 一般に $\mathbb{R}$ 上の連続関数の広義積分とルベーグ積分は (可積分性からして) 異なる可能性があるが, 有界閉区間上の連続関数はリーマン可積分かつルベーグ可積分でそれぞれの積分値も一致することが知られている.

2. 関数 K の満たす条件としてはもっと緩和された状況で考えることも可能であるが, ここでは面倒な議論を避けるため大きな開集合上で C^1 級であるという強い仮定を置いている.

Theorem B の証明のヒント:

$v\in\mathbb{R}^n$ を任意に選んで固定する. ルベーグの優収束定理 (下に主張だけ書いておく) を用いると, U 内の点 x に収束する点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について,

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{s\to 0}\int_{t\in I}\frac{K^t(x_n+sv)-K^t(x_n)}{s}dt = \int_{t\in I}\lim_{n\to\infty}\lim_{s\to 0}\frac{K^t(x_n+sv)-K^t(x_n)}{s}dt$$

が正当化できる. このとき左辺は $\lim_{n\to\infty} v_{x_n}(G)$ で, 右辺は $\int_{t\in I} v_x(K^t)dt$ である (ただし v_y は y における v での方向微分とする). 特に偏導関数 $v(G) : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto v_x(G)$ は well-defined な連続関数で $v_x(G) = \int_{t\in I} v_x(K^t)dt$ $(x\in U)$ となることが分かる.

Theorem D (ルベーグの優収束定理)**.** (I,m) を測度空間とし, I 上の関数 $f:I\to\mathbb{R}$ と I 上の可測関数の列 $\{f_n : I\to\mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が以下の条件を満たしているとする:

- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に各点収束する.
- ある可積分関数 $g:I\to\mathbb{R}$ であって, 十分大きな n について $|f_n(t)|\le g(t)$ $\quad$ (*for any* $t\in I$) となるものが存在する.

このとき f_n $(n\in\mathbb{N})$, f はそれぞれ可積分で,

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n dm = \int_I f dm.$$

Theorem B の証明. 各 $x \in U$ について $K_x : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto K(t,x)$ とおけば, $G(x) = \int_{t \in I} K_x(t)dt$ である. これが well-defined であることは K_x が有界閉区間 I 上の連続関数であり, 特にルベーグ可積分である (リーマン可積分でもある) ことから従う.

以降ベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ を任意に選んで固定する. 各 $x \in U$ について v_x を x における v での方向微分とする. このとき, 以下の事を示せばよい.

- 各 $x \in U$ について関数 $I \to \mathbb{R},\ t \mapsto v_x(K^t)$ が I 上可積分.
- $\frac{G(x+sv)-G(x)}{s} \to \int_{t \in I} v_x(K^t)dt$ (as $s \to 0$). 特に $v_x(G) = \lim_{s \to 0} \frac{G(x+sv)-G(x)}{s}$ は well-defined.
- $v(G) : U \to \mathbb{R},\ x \mapsto v_x(G)$ が連続.

各 $x \in U$ と $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ について

$$f_s^x : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{K(t,x+sv)-K(t,x)}{s}$$

とすれば, f_s^x は $|s|$ が十分小さいとき well-defined である. いま $K : (a,b) \times U \to \mathbb{R}$ は C^1 級であったから

$$v(K) : (a,b) \times U \to \mathbb{R},\ (t,x) \mapsto v_x(K^t)$$

は連続である. 特に各 x の U 内のコンパクト近傍 V_x を固定すると, $v(K)$ は $I \times V_x$ 上有界であり,

$$M_x := \sup_{(t,y) \in I \times V_x} |v_y(K^t)| < \infty$$

とおける. このとき各 $x \in U$ に対して, $|s|$ が十分小さい状況では $x + sv \in V_x$ であり,

$$\begin{aligned}
|f_s^x(t)| &= |\frac{K(t,x+sv)-K(t,x)}{s}| \\
&\le \sup_{y \in V_x} |v_y(K^t)| \quad (\because \text{平均値の定理}) \\
&\le M_x \quad (\text{for any } t \in I)
\end{aligned}$$

となる.

以下 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 内の数列 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ で $s_n \to 0$ (as $n \to \infty$) となるものを任意に固定する. このとき関数列 $\{f_{s_n}^x\}_{n \in \mathbb{N}}$ は

$$f^x : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto v_x(K^t)$$

に各点収束し, n が十分大きいとき

$$|f_{s_n}^x(t)| \le M_x \quad \text{for any } t \in I$$

である. 従ってルベーグの優収束定理より $f_{s_n}^x(t) = \frac{K(t,x+s_nv)-K(t,x)}{s_n}$, $f^x(t) = v_x(K^t)$ は I 上可積分で,

$$\begin{aligned}
\int_{t \in I} v_x(K^t)dt &= \int_{t \in I} f^x(t)dt \\
&= \lim_{n \to \infty} \int_{t \in I} f_{s_n}^x(t)dt \\
&= \lim_{n \to \infty} \int_{t \in I} \frac{K(t,x+s_nv)-K(t,x)}{s_n}dt \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{G(x+s_nv)-G(x)}{s_n}
\end{aligned}$$

を得る. 特に 0 に収束する $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 内の数列 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ としては任意のものを考えてたので, 各 $x\in U$ について $v_x(G):=\lim_{s\to 0}\frac{G(x+sv)-G(x)}{s}$ は well-defined で $v_x(G)=\int_{t\in I}v_x(K^t)dt$ となる.

最後に $v(G):U\to\mathbb{R},\ x\mapsto v_x(G)=\int_{t\in I}v_x(K^t)dt$ が連続であることを示そう. U 内の収束点列 $x_n\to x$ (as $n\to\infty$) について, $v_{x_n}(G)\to v_x(G)$ (as $n\to\infty$) となることを示せばよい. いま $K:(a,b)\times U\to\mathbb{R}$ は C^1 級であるから, $v(K):I\times U\to\mathbb{R},\ (t,x)\mapsto v_x(K^t)$ は連続であったことを思い出すと, 連続関数 $F_n=f^{x_n}:I\to\mathbb{R},\ t\mapsto v_{x_n}(K^t)$ は $F=f^x:I\to\mathbb{R},\ t\mapsto v_x(K^t)$ に各点収束する. n が十分大きいとき $x_n\in V_x$ であり, このとき

$$|F_n(t)|=|v_{x_n}(K^t)|\leq\sup_{y\in V_x}|v_y(K^t)|\leq M_x \text{ for any } t\in I$$

を得る. 従って再度ルベーグの優収束定理を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}v_{x_n}(G)&=\lim_{n\to\infty}\int_{t\in I}v_{x_n}(K^t)dt\\&=\lim_{n\to\infty}\int_{t\in I}F_n(t)dt\\&=\int_{t\in I}F(t)dt\\&=\int_{t\in I}v_x(K^t)dt\\&=v_x(G).\end{aligned}$$

□