Section 5 : 写像の微分

意義 : "C^∞級関数のなす $\mathbb{R}$ 代数" の言葉で C^∞ 級写像とその全微分を定義する.

Part I : 多変数の微分論の代数化

Section 2 $\mathbb{R}$ 代数

3 C^∞ 級関数

4 方向微分

5 写像の微分 ⊗

内容

- C^∞級写像の定義
- 写像の全微分
- 全微分の行列表示 (Jacobi行列)
- 写像の合成とその全微分

Section 5.1 : C^∞級写像

この節では C^∞級写像の代数的定義を述べる.

設定: $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$: 開集合

記号 各 $i = 1, 2$ について

$C^\infty(U_i)$: U_i 上の C^∞級関数全体のなす $\mathbb{R}$ 代数

連続写像

$\varphi : U_1 \to U_2$ について考える.
$U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$

記号 : $\varphi^* : C(U_2) \to C(U_1)$

$f \mapsto f \circ \varphi$

φ による引き戻し

（$\mathbb{R}$ 代数準同型

cf. Ex 2.2.8 ）

C^∞級写像の定義

Def 5.1.1　抽象論に使いやすい定義

連続写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ が C^∞級写像

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \varphi^*(C^\infty(U_2)) \subset C^\infty(U_1)$$

Prop 5.1.2 : $\varphi : U_1 \to U_2$ が C^∞級とする.

このとき $\varphi^* : C^\infty(U_2) \to C^\infty(U_1)$, $f \mapsto f \circ \varphi$

は $\mathbb{R}$代数準同型

C^∞級写像の同値な言い換え

Prop 5.1.3: 写像 $\varphi: U_1 \to U_2$ について以下は同値

(i) φ は Def 5.1.1 の意味で C^∞級

(i.e. φ は連続かつ $\varphi^*(C^\infty(U_2)) \subset C^\infty(U_1)$)

$\Updownarrow$

(ii) $\varphi: U_1 \to U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$

$x \longmapsto (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_{n_2}(x))$

と書いたとき $\varphi_1, \cdots, \varphi_{n_2} \in C^\infty(U_1)$

計算で確認しやすい条件

すぐ後で証明を紹介するよ.

Ex. 5.1.4 $\quad n_1 = n_2 = 2$

$U_1 := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1,\ x_1 > 0 \} \subset \mathbb{R}^2$

$U_2 := \{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 < 1,\ y_2 > 0 \} \subset \mathbb{R}^2$

このとき

$\varphi : U_1 \to U_2,\ (x_1, x_2) \mapsto \left(x_2, \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)} \right)$

は well-defined で C^∞ 級 (cf. Prop 5.1.3)

この写像は後々で球面の可微分構造の構成に用いる.

Prop 5.1.3 の証明の準備①

Lemma 5.1.5

$y_j : U_2 \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y_j$ とおくと

$\varphi_j = \varphi^*(y_j)$ as $U_1 \to \mathbb{R}$

（実は φ_j の定義そのもの）

Prop 5.1.3 の証明の準備②

位相空間論の復習

Prop 5.1.6: X を位相空間, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とする.

$\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ を $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積集合に積位相を定めたものとする.

このとき写像 $\varphi : X \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ について以下は同値

$x \mapsto (\varphi_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$

(i) $\varphi : X \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ は連続

(ii) 各 $\lambda\in\Lambda$ について $\varphi_\lambda : X \to Y_\lambda$ は連続

Prop 5.1.3 の証明の準備③

記号

以下 $U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ における

偏微分は $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{n_1}}$ の記号を用い、

$U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ における

偏微分は $\frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_{n_2}}$ の記号を用いる.

③ つづき

Prop 5.1.7 (連鎖律)　解析の復習

写像 $\varphi : U_1 \to U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ について

$$\begin{array}{ccc} U_1 & & U_2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_{n_2}(x)) \end{array}$$

$\varphi_1, \cdots, \varphi_{n_2} \in C^1(U_1)$ とする.

このとき 任意の $f \in C^1(U_2)$ について $\varphi^*(f) \in C^1(U_1)$ かつ

各 $j = 1, \cdots, n_1$ について

$$\underbrace{\frac{\partial(\varphi^*(f))}{\partial x_j}}_{\in C(U_1)} = \sum_{i=1}^{n_2} \underbrace{\left(\varphi^*\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y_i}}_{\in C(U_2)}\Big)\right)}_{\in C(U_1)} \cdot \underbrace{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}}_{\in C(U_1)} \quad \text{on } U_1$$

Prop 5.1.3 の証明の概要

(i) ⇒ (ii) :　(i) を仮定して (ii) を示す.

$\psi_j : U_2 \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y_j$ とおくと

$\varphi_j = \varphi^*(\psi_j)$ となる ($\because$ Lemma 5.1.5)

$\psi_j \in C^\infty(U_2)$ なので $\varphi_j = \varphi^*(\psi_j) \underset{\text{(i)}}{\in} C^\infty(U_1)$

つづき

(ii) $\Rightarrow$ (i) : (ii) を仮定して (i) を示す.

Prop 5.1.6 より φ は連続 (確認せよ).

「$\forall f \in C^k(U_2),\ \varphi^*(f) \in C^k(U_1)$」

を $k = 0, 1, 2, \cdots$ について帰納法で示す.

連鎖律 (Prop 5.1.7) を用いる.

$\blacksquare$

@ C^∞級関数は C^∞級写像

$n_2 = 1$, $U_2 = \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n_2}$ の場合を考えると,

$f : U_1 \to \mathbb{R}$ について, 以下は同値

(i) f は U_1 上の C^∞級関数 (Def 3.1.4)

(ii) f は U_1 から $\mathbb{R}$ への C^∞級写像 (Def 5.1.1)

← U 上の C^∞級関数全体

注意 $f, g \in C^\infty(U)$ について

各点積 $f \cdot g \in C^\infty(U)$ が

実数の積

$f \cdot g : U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ で定義できる.

しかし $\varphi, \psi : U_1 \to U_2$: C^∞級写像について

"各点積 $\varphi \cdot \psi : U_1 \to U_2$, $x \mapsto \varphi(x) \cdot \psi(x)$" は一般には定義できない

??

Section 5.1 終

Section 5.2: C^∞級写像の全微分

この節では C^∞級写像の全微分

を代数的に定義する.

設定: $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\emptyset \neq U_1 \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_1}$, $\emptyset \neq U_2 \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_2}$

$\varphi : U_1 \to U_2$: C^∞級

$p \in U_1$

記号: T_pU_1 : U_1 の p における接空間

$T_{\varphi(p)}U_2$: U_2 の $\varphi(p)$ における接空間

Recall: $\varphi^* : C^\infty(U_2) \to C^\infty(U_1)$ は $\mathbb{R}$代数準同型

$$f \mapsto f \circ \varphi$$

(cf. Prop 5.1.2)

Prop 5.2.1: 各 $\gamma \in T_p U_1$ について

$$\gamma \circ \varphi^* \in T_{\varphi(p)} U_2$$

Hint: $\gamma \in T_p U_1$ を任意にとる.

示. ① $\gamma \circ \varphi^* : C^\infty(U_2) \to \mathbb{R}$ は線型

② $\gamma \circ \varphi^*$ は $\varphi(p)$ におけるライプニッツ則を満たす.

全微分の定義

Def 5.2.2

写像 $(d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2$

$$g \mapsto g \circ \varphi^*$$

を φ の p における全微分とよぶ

(または単に"微分")

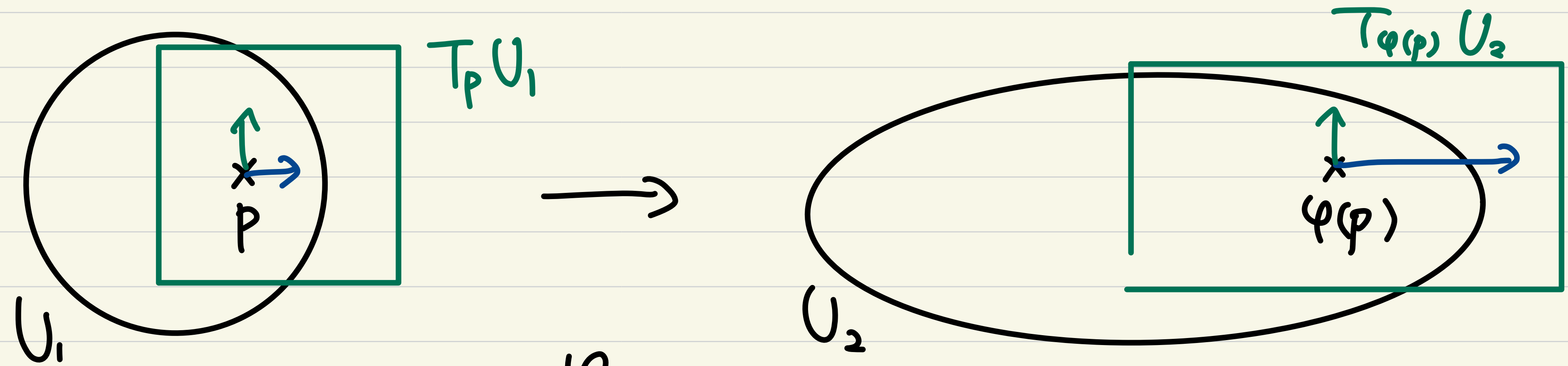
Prop 5.2.3

$(d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2,\ g \mapsto g \circ \varphi^*$

は線型写像

全微分は線型写像

"全微分" の イメージ



$$U_1 \xrightarrow{\varphi} U_2$$

を 線型近似

$$T_pU_1 \xrightarrow{(d\varphi)_p} T_{\varphi(p)}U_2$$

全微分の解析的特徴付け：

Thm 5.2.4：以下 $\|v\| := \sqrt{\sum_i v_i^2}$ とおく.

(1) $$\lim_{\substack{v \to 0 \\ (v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})}} \frac{\|\varphi(p+v) - \varphi(p) - (d\varphi)_p(v)\|}{\|v\|} = 0$$

(2) 線型写像 $A : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2$ が

$$\lim_{\substack{v \to 0 \\ (v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})}} \frac{\|\varphi(p+v) - \varphi(p) - Av\|}{\|v\|} = 0$$

を満たすなら $A = (d\varphi)_p$.

(証明は試験範囲外：Section 5.5)

Section 5.3：全微分の行列表示

この節では

C^∞級写像の全微分の行列表示を行う.

(線型写像)

設定：$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\emptyset \neq U_i \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_i}$　$(i = 1, 2)$

$\varphi : U_1 \to U_2$：C^∞級写像

$p \in U_1$

記号：$(d\varphi)_p : T_p U_1 \to T_{\varphi(p)} U_2,\ \gamma \mapsto \gamma \circ \varphi^*$

φのpにおける全微分

記号

以下 $U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ における

偏微分は $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{n_1}}$ の記号を用い,

$U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ における

偏微分は $\frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_{n_2}}$ の記号を用いる.

Cor 4.3.6 より

$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_{n_1}}\right)_p \right\}$ は T_pU_1 の基底.

$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)}, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y_{n_2}}\right)_{\varphi(p)} \right\}$ は $T_{\varphi(p)}U_2$ の基底.

目標：線型写像 $(d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2$ を

基底：$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_{n_1}}\right)_p \right\}$, $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)}, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y_{n_2}}\right)_{\varphi(p)} \right\}$

について行列表示する.

$$\varphi : U_1 \to U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$$

$$x \mapsto (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_{n_2}(x))$$ と書く.

Recall: Prop 5.1.2 より $\varphi_i \in C^\infty(U_1)$ $(i = 1, \cdots, n_2)$

Def. 5.3.1:

$$(J\varphi)_p := \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p) \right)_{i=1,\cdots,n_2,\ j=1,\cdots,n_1} \in M(n_2, n_1 : \mathbb{R})$$

を φ の p における Jacobi 行列 とよぶ

Theorem 5.3.2 : Jacobi 行列 $(J\varphi)_p$ は

$(d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2$ (線型写像)

の 表現行列 with respect to

$\{(\frac{\partial}{\partial x_j})_p\}_{j=1,\cdots,n_1}$ and $\{(\frac{\partial}{\partial y_i})_{\varphi(p)}\}_{i=1,\cdots,n_2}$

i.e. $y = \sum_{j=1}^{n_1} a_j (\frac{\partial}{\partial x_j})_p$ $(a_j \in \mathbb{R})$

とおくと

$$(d\varphi)_p(y) = \sum_{i=1}^{n_2} b_i (\frac{\partial}{\partial y_i})_{\varphi(p)} \quad (b_i \in \mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n_2} \end{pmatrix} = (J\varphi)_p \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n_1} \end{pmatrix}$$

図式

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
T_p U_1 \arrow[r, "(d\varphi)_p"] & T_{\varphi(p)} U_2 \\
\mathbb{R}^{n_1} \arrow[u, "{\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_{n_1}}\right)_p\right)}"] \arrow[r, "(J\varphi)_p"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R}^{n_2} \arrow[u, swap, "{\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)}, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial y_{n_2}}\right)_{\varphi(p)}\right)}"]
\end{tikzcd}
$$

Ex 5.3.3 : $n_1=2,\ n_2=3,\ U_1=\mathbb{R}^2,\ U_2=\mathbb{R}^3$ とする.

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\quad (x_1, x_2) \mapsto \Big(\underset{\varphi_1(x_1,x_2)}{\underset{\|}{\cos x_1}},\ \underset{\varphi_2(x_1,x_2)}{\underset{\|}{\sin x_2}},\ \underset{\varphi_3(x_1,x_2)}{\underset{\|}{x_1+x_2}}\Big)$$

は C^∞級写像 (cf. Prop. 5.1.3).

$p=(p_1,p_2)\in\mathbb{R}^2$ を fix

このとき p における Jacobi 行列は

$$(J\varphi)_p = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(p) & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}(p) \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}(p) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(p) \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial x_1}(p) & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial x_2}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin p_1 & 0 \\ 0 & \cos p_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ を fix.

Thm 5.3.2 より

$$(d\varphi)_p\underbrace{\begin{pmatrix} a_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p \\ + \\ a_2\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p \end{pmatrix}}_{\in T_p\mathbb{R}^2} = \underbrace{\begin{matrix} -a_1\cdot(\sin p_1)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{\varphi(p)} \\ a_2\cdot(\cos p_2)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_{\varphi(p)} \\ + \\ (a_1+a_2)\left(\frac{\partial}{\partial y_3}\right)_{\varphi(p)} \end{matrix}}_{\in T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^3}$$

$$\left(\because\ (J\varphi)_p\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1\sin p_1 \\ a_2\cos p_2 \\ a_1+a_2 \end{pmatrix}\right)$$

Thm 5.3.2 の証明の準備

Lemma 5.3.4 (Cor 4.5.7 の一部)

任意の $y \in T_{\varphi(p)}U_2$ について

$$y = \sum_{i=1}^{n_2} y(\psi_i)\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)}$$

ただし $\psi_i : U_2 \to \mathbb{R},\ y \longmapsto y_i$

Proof of Lemma 5.3.4

Cor 4.3.6 より $y = \sum_{i=1}^{n_2} b_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)}$ $(b_i \in \mathbb{R})$ と一意に書ける.

"$\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)_{\varphi(p)}(\psi_i) = \delta_{ik}$" に注意すると $y(\psi_i) = b_i$ ∎

Proof of Thm 5.3.2: $j=1,\cdots,n_1$ を任意にとる.

示) $$(d\varphi)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) = \sum_{i=1}^{n_2} \underbrace{((J\varphi)_p)_{ij}}_{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p)} \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)}$$

Lemma 5.3.4 より以下を示せば十分

示) $$\forall i=1,\cdots,n_2,\ \left((d\varphi)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)\right)(y_i) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p)$$

$i=1,\cdots,n_2$ を任意にとる.

つづき

示) $\left((d\varphi)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)\right)(y_i) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p)$

左辺 $= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p \circ \varphi^*\right)(y_i)$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p(\varphi^*(y_i))$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p(\varphi_i)$ ($\because$ Lemma 5.1.5)

$= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p) =$ 右辺 ∎

Section 5.3 終

Section 5.4: C^∞級写像の合成とその微分

目標 ① 「C^∞級写像の合成はC^∞級写像」

② 「合成の全微分は全微分の合成」

設定 $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

各 $i = 1, 2, 3$ について $U_i \underset{\text{open}}{\subseteq} \mathbb{R}^{n_i}$

$\varphi : U_1 \to U_2$:

$\psi : U_2 \to U_3$:

C^∞級

目標① について

Theorem 5.4.1 : 合成写像

$\psi \circ \varphi : U_1 \to U_3$ は C^∞級

図式 :

$$
\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "\psi \circ \varphi"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\circlearrowleft"] & U_2 \arrow[r, "\psi"] & U_3
\end{tikzcd}
$$

以下、証明を紹介する。

少し準備

Lemma 5.4.2

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$$

$$\text{as } C(U_3) \to C(U_1)$$

図式：

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rrd, phantom, "(\psi\circ\varphi)^*(f)" description] & U_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[rd, phantom, "\psi^*(f)" description] & U_3 \arrow[d, "f"] \\ & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$(\psi\circ\varphi)^*(f) = \varphi^*(\psi^*(f))$$

Proof of Theorem 5.4.1

示 $(\psi \circ \varphi)^*(C^\infty(U_3)) \subset C^\infty(U_1)$

i.e. $\forall f \in C^\infty(U_3)$, $(\psi \circ \varphi)^*(f) \in C^\infty(U_1)$

$f \in C^\infty(U_3)$ を任意にとる.

示 $(\psi \circ \varphi)^*(f) \in C^\infty(U_1)$

ここで Lemma 5.4.2 より

$$
\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi)^*(f) &= (\varphi^* \circ \psi^*)(f) \\
&= \varphi^*(\psi^*(f)).
\end{aligned}
$$

つづく

㊖ $\varphi^*(\psi^*(f)) \in C^\infty(U_1)$.

いま ψ は C^∞ 級なので $\psi^*(f) \in C^\infty(U_2)$

φ も C^∞ 級なので $\varphi^*(\psi^*(f)) \in C^\infty(U_1)$

$\blacksquare$

目標② について

Recall : $\psi \circ \varphi : U_1 \to U_3$ は C^∞ 級 (cf. Thm 5.4.1)

Theorem 5.4.3 (合成写像の全微分)

$p \in U_1$ を fix. このとき

$$(d(\psi \circ \varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{(\psi\circ\varphi)(p)}U_3$$

図式 :

$$\begin{array}{ccccc} U_1 & \xrightarrow{\varphi} & U_2 & \xrightarrow{\psi} & U_3 \\ T_pU_1 & \xrightarrow{(d\varphi)_p} & T_{\varphi(p)}U_2 & \xrightarrow{(d\psi)_{\varphi(p)}} & T_{(\psi\circ\varphi)(p)}U_3 \end{array}$$

Proof of Theorem 5.4.3

(ii) $(d(\psi\circ\varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)}\circ(d\varphi)_p$

as $T_pU_1 \to T_{(\psi\circ\varphi)(p)}U_3$

i.e. $\forall y \in T_pU_1$,

$$(d(\psi\circ\varphi))_p(y) = ((d\psi)_{\varphi(p)}\circ(d\varphi)_p)(y)$$

as in $T_{(\psi\circ\varphi)(p)}U_3$

$y \in T_pU_1$ を任意にとる.

示 $(d(\psi\circ\varphi))_p(y) = ((d\psi)_{\varphi(p)}\circ(d\varphi)_p)(y)$

$$(\text{左辺}) = y\circ(\psi\circ\varphi)^*$$

$$= y\circ\varphi^*\circ\psi^* \quad (\because \text{Lemma } 5.4.2)$$

$$= \underbrace{((d\varphi)_p(y))}_{\in T_{\varphi(p)}U_2}\circ\psi^*$$

$$= (d\psi)_{\varphi(p)}\left((d\varphi)_p(y)\right)$$

$$= ((d\psi)_{\varphi(p)}\circ(d\varphi)_p)(y) = (\text{右辺})$$

∎

Cor 5.4.4 (cf. Thms 5.3.2 and 5.1.3)

$$\underbrace{(J(\psi\circ\varphi))_p}_{n_3\times n_1} = \underbrace{(J\psi)_{\varphi(p)}}_{n_3\times n_2} \cdot \underbrace{(J\varphi)_p}_{n_2\times n_1}$$

行列の積

(実はこれは連鎖律)

Section 5.4 終

Section 5.5 : 全微分の解析的意味付け

(Thm 5.2.4 について) 試験範囲外

Thm 5.2.4 (写像の全微分の解析的な意味)

の証明のアイデアを紹介する.

設定 : $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\emptyset \neq U_i \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_i} \quad (i=1,2)$

$\varphi : U_1 \to U_2$: C^∞ 級写像

$p \in U_1$

記号 : $(d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2,\ g \mapsto g\circ\varphi^*$

φ の p における全微分

$(J\varphi)_p = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i=1,\cdots,n_1,\ j=1,\cdots,n_2}$: φ の p における Jacobi 行列

Recall : $(J\varphi)_p$ は自然な基底達についての

$(d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2$ の表現行列

(Thm 5.3.2)

Thm 5.2.4 は以下の定理から従う：

Theorem 5.5.1：$\|\cdot\|_1$ を $\mathbb{R}^{n_1}$ 上のノルム，
$\|\cdot\|_2$ を $\mathbb{R}^{n_2}$ 上のノルムとする（定義後述）

$n_2 \times n_1$ 行列 A についての以下の条件Ⓐを考える：

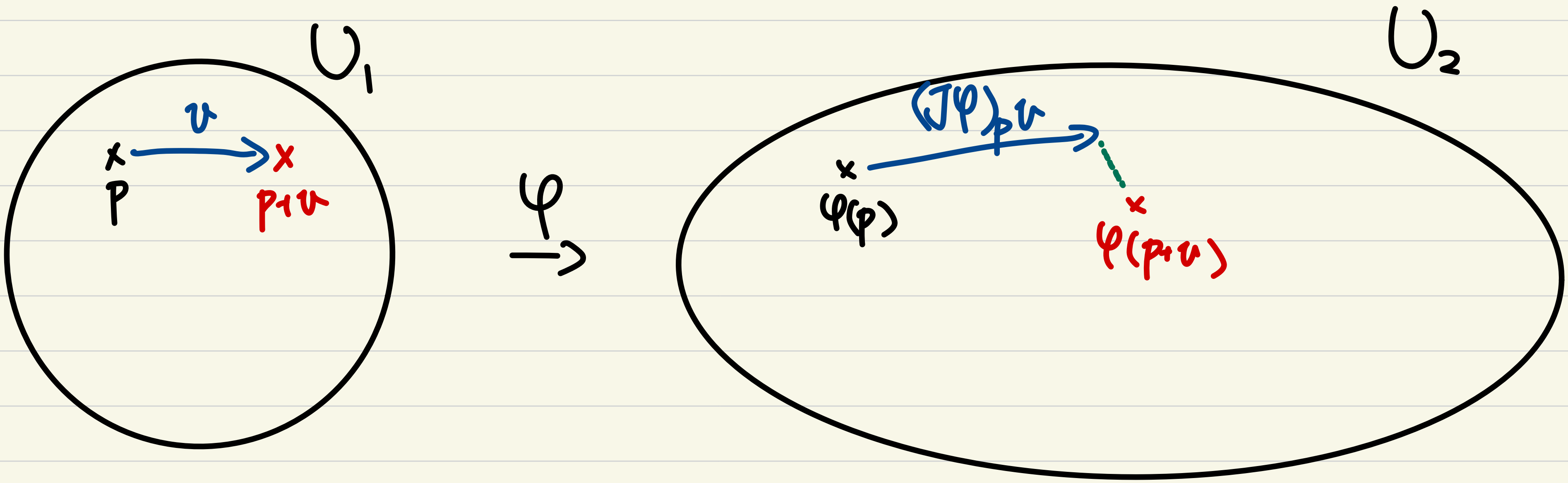
条件Ⓐ：
$$\lim_{\substack{v \to 0 \\ (v \in \mathbb{R}^{n_1} \setminus \{0\})}} \frac{\|\varphi(p+v) - \varphi(p) - A\, v\|_2}{\|v\|_1} = 0$$

縦ベクトルとみなしている．

このとき
行列 $(J\varphi)_p$ は条件Ⓐを満たす唯一の $n_2 \times n_1$ 行列
である．

Remark：条件Ⓐはノルム $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ のとり方によらない．

ここでは Thm 5.5.1 の証明の詳細は述べないが，
Remark の説明のみ述べておく．



気持ち : $\varphi(p+v) \fallingdotseq \varphi(p) + (J\varphi)_p v$

$\|v\|_1$ が十分小さいとき, 誤差が $\|v\|_2$ に比べて
非常に小さい

ノルムに関する準備:

以下しばらく、V を実ベクトル空間とする。

Def. 5.5.2: 写像 $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ v \mapsto \|v\|$

が V 上のノルムであるとは、

以下の三条件を満たすこと:

絶対値

条件(i) $\forall v \in V,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|.$

条件(ii) $\forall v, w \in V,\ \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$

条件(iii) $\forall v \in V \setminus \{0\},\ \|v\| > 0.$

Prop. 5.5.3：$\|\cdot\|$ を V 上のノルムとする.

このとき $d_{\|\cdot\|} : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$(v, w) \mapsto \|v - w\|$$

は V 上の距離関数を定める.

Def. 5.5.4：$\|\cdot\|$ を V 上のノルムとする.

距離関数 $d_{\|\cdot\|}$ の定める V 上の位相を $\mathcal{O}_{\|\cdot\|}$ と書くことにする.

Def. 5.5.5 :

$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ をそれぞれ V 上のノルムとする.

$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ が同値である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\exists}c, c' \in \mathbb{R}_{>0}$

s.t. ${}^{\forall}v \in V$, $c\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq c'\|v\|_2$

{ノルム on V} 上の同値関係を定める.

Prop 5.5.6 :

V 上のノルム $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ が同値

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{O}_{\|\cdot\|_1} = \mathcal{O}_{\|\cdot\|_2}$

Theorem 5.5.7 : V を有限次元実ベクトル空間とする.

このとき任意の2つのノルムは同値.

(証明はそこまで難しくない)

Cor 5.5.8 : 有限次元実ベクトル空間において,

"ノルムの誘導する位相"は一意.

(この位相を"標準的な位相"とよぶことが多い)

Remark : 無限次元ベクトル空間には

一般にはノルムの定める位相は

無数にある.

Thm 5.5.1 の後の Remark は次の命題と Thm 5.5.7 で説明できる.

Prop 5.5.9: V, W を実ベクトル空間とする.

$\|\cdot\|_1^V, \|\cdot\|_2^V$ を V 上の同値なノルム,

$\|\cdot\|_1^W, \|\cdot\|_2^W$ を W 上の同値なノルムとする.

また D を 0_V の閉近傍 in V とし,

Vのゼロ元

$\varphi : D \to W$ を写像とする.

このとき以下は同値

(i) $$\lim_{v \to 0} \frac{\|\varphi(v)\|_1^W}{\|v\|_1^V} = 0$$

(ii) $$\lim_{v \to 0} \frac{\|\varphi(v)\|_2^W}{\|v\|_2^V} = 0$$

(証明は難しくない)

Thm 5.5.1 の証明の中心的アイデア

Thm 5.5.7, Prop 5.5.9 より

$\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$ のノルムとして

$$\|v\| := \max_{j=1,\cdots,n_1} |v_j| \quad (v \in \mathbb{R}^{n_1})$$

$$\|w\| := \max_{i=1,\cdots,n_2} |w_i| \quad (w \in \mathbb{R}^{n_2})$$

を採用してよい.

ℓ^∞ ノルム

Section 5.5 終