これからやりたいこと（雑）

① 位相空間上の"C^∞-atlas"（地図帳）を定義する.

C^∞-atlasが定まった空間をC^∞級多様体とよぶ.
（C^∞ mfd）

② MをC^∞ mfdとする.

$C^\infty(M)$："M上のC^∞級関数全体のなす$\mathbb{R}$代数"
が定義される.

③ "接空間"，"C^∞級写像"，"写像の微分"
が定義される.

Section 6：局所座標系

意義：位相空間上の局所座標系を定義する．

(地図)

Part II：可微分多様体の定義

Section 6　局所座標系

Section 7　座標変換と C^∞-atlas

Section 8　C^∞級関数 on C^∞-atlas

Section 9　極大 C^∞-atlas

Section 10　C^∞級多様体

Section 11　射影空間

内容

- 位相空間論の各種命題の復習
- 局所座標系の定義

Section 6.1 : 位相空間論の各種命題

今後よく使う位相空間論の命題を整理しておく.

設定

$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$: 位相空間

相対位相の復習

Def 6.1.1: 各部分集合 $A \subset X$ について

$$\mathcal{O}_X(A) := \{ A \cap U \mid U \in \mathcal{O}_X \} \quad (\subset \mathcal{P}(A))$$

を $\mathcal{O}_X$ の定める A の相対位相とよぶ

Prop 6.1.2: A を X の部分集合とし包含写像を $\iota : A \hookrightarrow X$ とおく.

このとき $\mathcal{O}_X(A)$ は

"ι を連続とするような最弱な位相".

Prop 6.1.3: $B \subset A \subset X$ とする.

このとき

$$\mathcal{O}_X(B) = (\mathcal{O}_X(A))(B)$$

相対位相の相対位相は相対位相

Prop 6.1.4 : $U \in \mathcal{O}_X$ (i.e. UはXの開集合)とする.

部分集合 $V \subset U$ について以下は同値

(i) $V \in \mathcal{O}_X(U)$ (V は open in U)

$\Updownarrow$

(ii) $V \in \mathcal{O}_X$ (V は open in X)

Remark : U が X の開集合でない場合は同様の命題は成り立たない.

($V = U$ とすると反例になる)

同相写像についての復習

Prop 6.1.5

$\phi : X \to Y$: 全単射連続写像とする.

以下は同値

(i) ϕ は同相 (i.e. $\phi^{-1} : Y \to X$ も連続)

(ii) ϕ は開写像 (i.e. ${}^{\forall} U \in \mathcal{O}_X$, $\phi(U) \in \mathcal{O}_Y$)

Prop 6.1.6: $A \subset X$, $B \subset Y$ とし、

相対位相 $\mathcal{O}_X(A)$, $\mathcal{O}_Y(B)$ により A, B をそれぞれ位相空間とみなす。

(1) $\varphi : X \to Y$ を連続写像であって

$\varphi(A) \subset B$ となるものとする。

φ は A から B への写像としても連続。

(2) $\varphi : X \to Y$ を同相写像であって、

$\varphi(A) = B$ となるものとする。

φ は A から B への写像としても同相。

Section 6.1 終

Section 6.2：局所座標系の定義

位相空間上の局所座標系の定義を述べる.

設定： $M = (M, \mathcal{O}_M)$：位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Def. 6.2.1（局所座標系）

$O \underset{\text{open}}{\subset} M$　　$U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とし，

相対位相により位相空間とみなす.

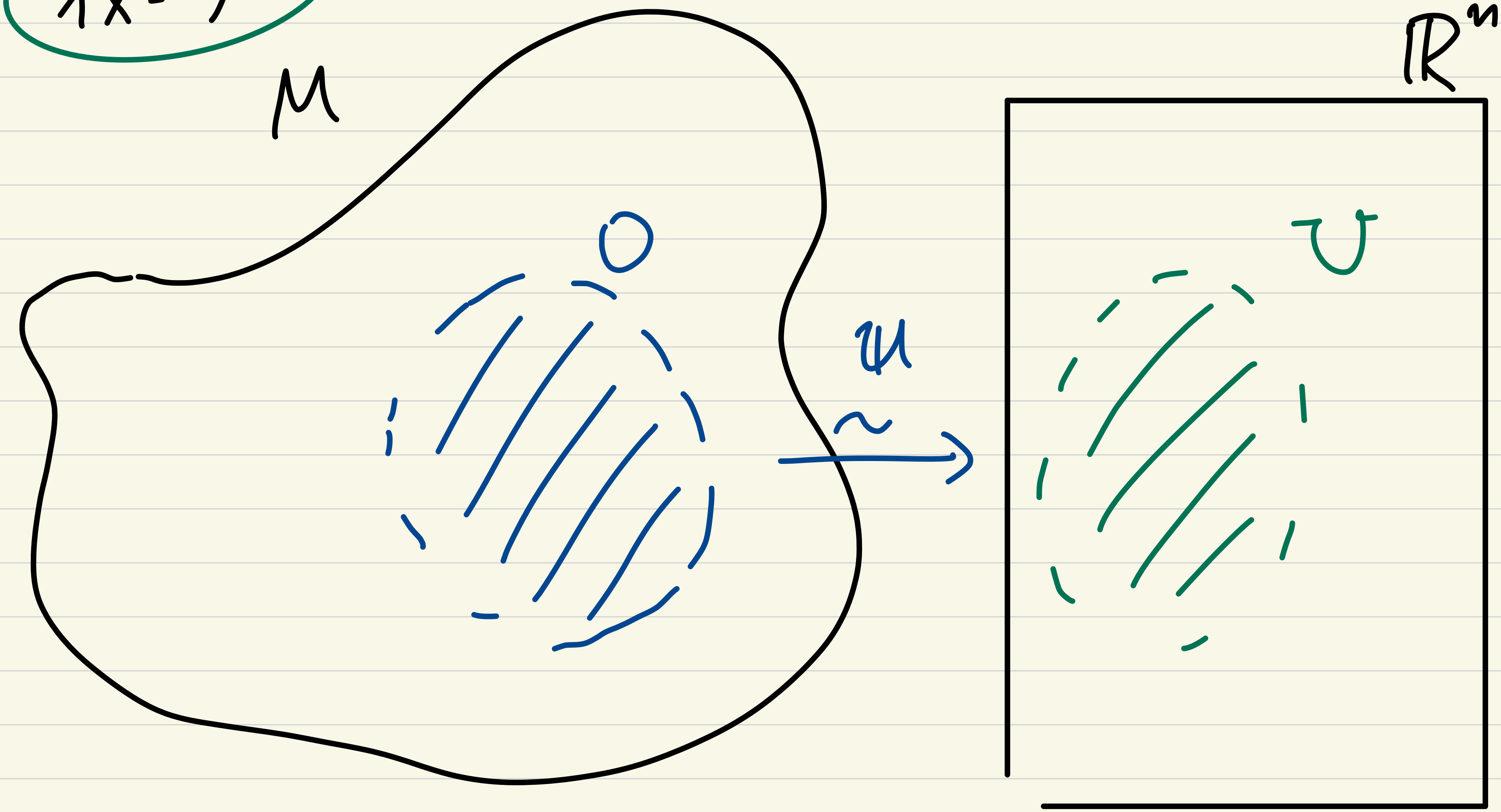
また $u : O \to U$ を同相写像とする.

このとき

組 (O, U, u) を M の n 次元局所座標系とよぶ.

また u を O 上の n 次元局所座標とよぶ.

イメージ



O の"地図"

すぐ後で例を紹介するよ.

以下の記号を準備しておく.

Def. 6.2.2

$$LC(M;\mathbb{R}^n) := \{(O, U, \varphi) \mid M\text{の}n\text{次元局所座標系}\}$$

Local coordinate

local coordinate system

(この講義の独自記号なので注意)

Ex 6.2.2 (自明な例)

$M = U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ a とす

$$(\underset{\substack{\| \\ M}}{U}, U, \mathrm{id}_U) \in LC(M; \mathbb{R}^n)$$

Ex 6.23（球面上の局所座標系）

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし，

$$S^n := \{ x = (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

openではない

とおく．

相対位相により S^n を位相空間とみなす．

（連結，コンパクト，ハウスドルフ）

$$O := \{ x \in S^n \mid x_{n+1} > 0 \} \subset S^n$$

$$U := \{ u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1 \} \subset \mathbb{R}^n$$

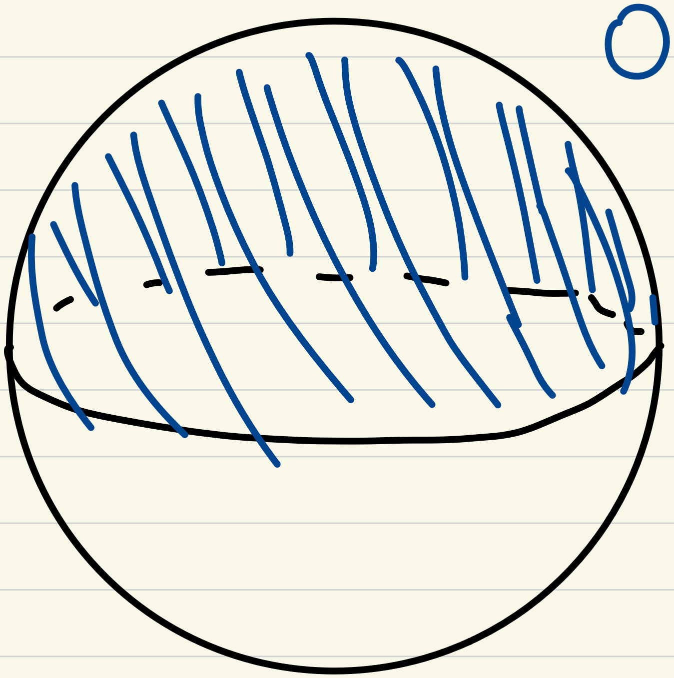
とし，

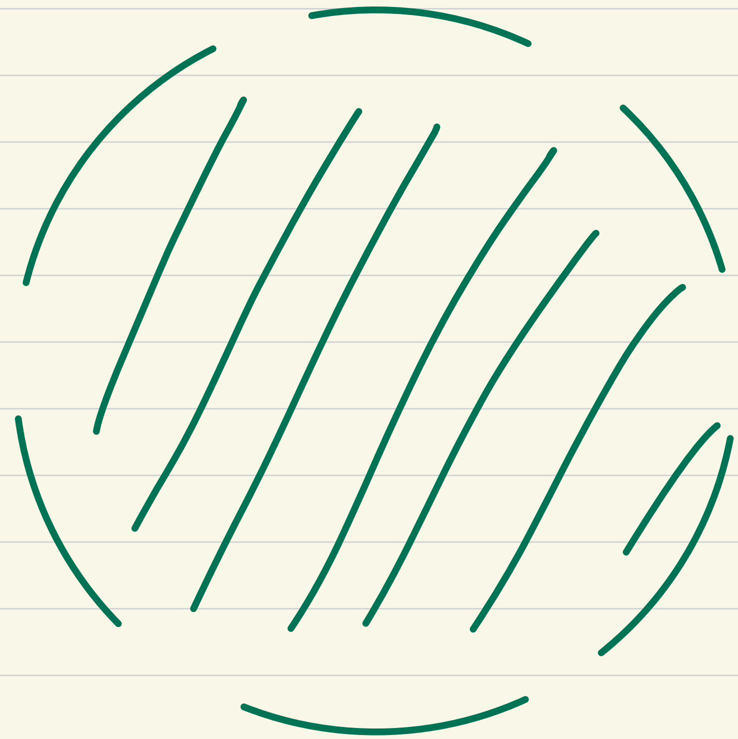
$\mathcal{U} : O \to U, \quad x \mapsto (x_1, \cdots, x_n)$ とおく．

イメージ

$n=2$ の場合

$$O \underset{\text{open}}{\subset} S^2 \xrightarrow[\sim]{\psi} U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^2$$





Claim : $(O, U, \psi) \in \mathcal{LC}(S^n; \mathbb{R}^n)$

Proof : 示

① $O \underset{\text{open}}{\subset} S^n$

② $U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$

③ $\psi : O \to U$ は well-defined で同相写像

値域に注意

①を示す：

示 $O \underset{\text{open}}{\subset} S^n$.

$$O = S^n \cap \underbrace{\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} > 0 \}}_{\text{open in } \mathbb{R}^{n+1}}$$

より O : open in S^n

（①証明終）

② を示す:

㊬ $U \subset_{\text{open}} \mathbb{R}^n$.

多項式関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $u \mapsto \sum_{i=1}^{n} u_i^2$

は $\mathbb{R}^n$ 上連続であり,

$U = f^{-1}((-\infty, 1))$ $\left((-\infty, 1) \subset_{\text{open}} \mathbb{R} \right)$

より U は open in $\mathbb{R}^n$

(② 証明終)

③を示す：

示 Ⓐ $\mathfrak{u}: O \to U,\ x \mapsto (x_1, \cdots, x_n)$ は well-defined

Ⓑ $\mathfrak{u}$ は同相写像

Ⓐを示す.

示 $\forall x \in O,\ (x_1, \cdots, x_n) \in U$

$x \in O$ を任意にとる.

示 $(x_1, \cdots, x_n) \in U$ i.e. $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1$

$x \in O$ より $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ かつ $x_{n+1} > 0$.

従って $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 - x_{n+1}^2 < 1$ （Ⓐ証明終）

(B) を示す：

$\phi : U \to O,\ (u_1, \cdots, u_n) \mapsto \left(u_1, \cdots, u_n, \sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)$

とおく．

以下を示せばよい

(示) ① ϕ は well-defined.

② ϕ は π の逆写像 $\left(\text{i.e. } \phi \circ \pi = id_O \text{ かつ } \pi \circ \phi = id_U\right)$

③ π は連続

④ ϕ は連続

イ を示す:

値が定まることを確認

値域の元であることを確認

示 $\forall u \in U$, $1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2 > 0$ かつ $\left(u_1, \cdots, u_n, \sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right) \in O$.

$u \in U$ を任意にとる.

U の定義から $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1$ より $1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2 > 0$.

示 $\left(u_1, \cdots, u_n, \sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right) \in O$.

i.e. $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \left(\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)^2 = 1$

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \left(\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + 1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \\
&= 1 = \text{右辺}
\end{aligned}
$$

（① 証明終）

ロ を示す：

示 i $\phi \circ \psi = id_O$

ii $\psi \circ \phi = id_U$

i を示す：

$x \in O$ を任意にとる.

示 $(\phi \circ \psi)(x) = x$

左辺 $= \phi(x_1, \cdots, x_n) = \left(x_1, \cdots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$

ここで $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$, $x_{n+1} > 0$ (∵ $x \in O$) に注意すると

$$x_{n+1} = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2} .$$

よって 左辺 $= (x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = x =$ 右辺.

(ⅰ 証明終)

ⅱ を示す: $u \in U$ を任意にとる.

示 $\psi \circ \phi(u) = u$

$$\text{左辺} = u\left(u_1, \cdots u_n, \sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)$$

$$= (u_1, \cdots, u_n) = u = \text{右辺}$$

（ⅰ 証明終）

（ロ 証明終）

(1) を示す:

(示) $u : O \to U$ は連続

以下を示せば十分 ($\because$ Prop 6.1.1 & 6.1.6 (1))

(示) $\exists \tilde{u} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$: 連続 s.t. $\tilde{u}|_O = u$

$\tilde{u} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x_1, \cdots, x_n)$ とする

各成分が連続関数(多項式関数)

なので $\tilde{u}$ は連続 ($\because$ Prop 5.1.6)

また定義から $\tilde{u}|_O = u$

((1) 証明終)

㊁を示す:

㊟ $\phi : U \to O$ は連続 ($\subset \mathbb{R}^{n+1}$)

以下を示せば十分 ($\because$ Prop 6.1.6 (1))

㊟ ϕ は $\mathbb{R}^{n+1}$ への写像として連続

$\phi : U \to \mathbb{R}^{n+1}, \ (u_1, \cdots, u_n) \mapsto \left(u_1, \cdots, u_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)$

とおくと各成分が連続 (最後の成分は Ex 3.2.4)

なので ϕ も連続 ($\because$ Prop 5.1.6)

(㊁証明終)(Ⓑ証明終)(③証明終) ☒

次の命題は今後よく使う

Prop 6.2.4

$(O, U, \psi) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$ とする.

また $O_0 \underset{\text{open}}{\subset} O$ を fix.

このとき

$$(O_0, \psi(O_0), \psi|_{O_0} : O_0 \to \psi(O_0)) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$$

Proof of Prop 6.2.4

示 ① $O_0 \underset{\text{open}}{\subset} M$

② $\pi(O_0) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$

③ $\pi|_{O_0} : O_0 \to \pi(O_0)$ は同相写像

①を示す

(示) $\mathcal{O}_0 \underset{\text{open}}{\subset} M$.

$\mathcal{O}_0 \underset{\text{open}}{\subset} \mathcal{O}$ かつ $\mathcal{O} \underset{\text{open}}{\subset} M$ より

$\mathcal{O}_0 \underset{\text{open}}{\subset} M$ ($\because$ Prop 6.1.4)

(① 証明終)

② を示す

示 $u(O_0) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$

いま $u: O \to U$ は同相写像なので,

特に開写像 ($\because$ Prop 6.1.5)

従って $u(O_0) \subset U$: open ($\because O_0 \underset{\text{open}}{\subset} O$)

いま $U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ なので $u(O_0) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ ($\because$ Prop 6.1.4)

(② 証明終)

Mからの相対位相　　$\mathbb{R}^n$からの相対位相

③を示す：示 $u|_{O_0} : O_0 \to u(O_0)$ は同相写像

O_0の位相はOからの相対位相とみなしてよく、
$u(O_0)$の位相はUからの相対位相とみなしてよい
(∵ Prop 6.1.3)

いま $u : O \to U$ は同相写像なので

$u|_{O_0} : O_0 \to u(O_0)$ も同相写像
(∵ Prop 6.1.6 (2))

(③証明終)　∎

言葉の定義

Def 6.2.5:

$p \in M$, $(O, U, u) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ とする.
$p \in O$ となるとき
(O, U, u) を p のまわりの
n次元局所座標系とよぶ

Ex 6.2.6: Ex 6.2.3 において

$p = (0, 0, \cdots, 0, 1) \in S^n$ とおくと
(O, U, u) は p のまわりの n次元局所座標系

Section 6.2
終