Section 7 : 座標変換と C^∞-atlas

意義 : 局所座標系の間の"変換"を定義する.
また"整合性のある地図帳"として C^∞-atlas を定義する.

Part II : 可微分多様体の定義

Section 6 局所座標系
Section 7 座標変換と C^∞-atlas
Section 8 C^∞級関数 on C^∞-atlas
Section 9 極大 C^∞-atlas
Section 10 C^∞級多様体
Section 11 射影空間

外微分論の難所：① 接空間

② C^∞級写像とその微分

③ 座標変換

④ 極大 atlas

新しい視点なので難しい

(もうやった)

ややこしいだけ

(訓練あるのみ)

地図同士の整合性

"完全版"地図帳

内容

- 座標変換の定義
- 座標変換の C^∞ 性
- C^∞-atlas の定義

Section 7.1: 座標変換の定義

この節では座標変換の定義を述べる.

設定: M: 位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(O, U, u), (O', V, v) \in LC(M; \mathbb{R}^n)$

記号

$LC(M; \mathbb{R}^n)$: Mのn次元局所座標系全体の集合

$$u(O \cap O') \underset{\text{open}}{\subset} U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$$

$$v(O \cap O') \underset{\text{open}}{\subset} V \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$$ に注意.

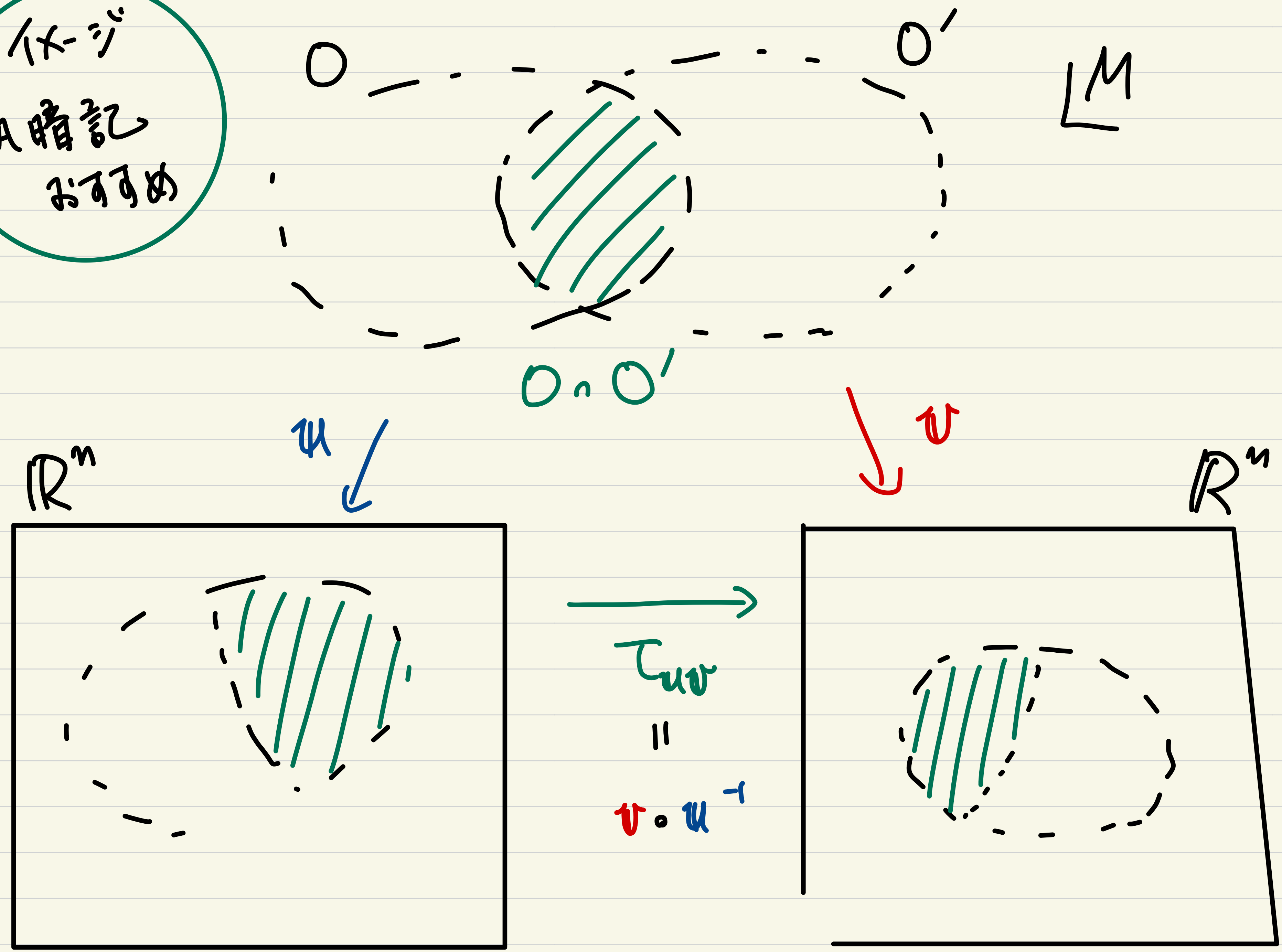
Def. 7.1.1 : "2枚の地図を見比べる"

$$\tau_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$$

$$\tau_{uv} = v \circ u^{-1}, \quad u \mapsto v(u^{-1}(u))$$

を (O, U, u) から (O', V, v) への座標変換という.

イメージ
丸暗記
おすすめ



Ex 7.1.2 : $n=2$ とする.

$$O := \{ x \in S^2 \mid x_3 > 0 \}$$

$$U := \{ u \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1 \} \rightsquigarrow (O, U, \mathfrak{u}) \in LC(S^2; \mathbb{R}^2)$$

(cf. Ex 6.2.3)

$$\mathfrak{u} : O \to U, \quad x \mapsto (x_1, x_2)$$

$$(\mathfrak{u}^{-1} : U \to O, \quad u \mapsto (u_1, u_2, \sqrt{1-u_1^2-u_2^2}\ )$$

$$O' := \{ x \in S^2 \mid x_2 > 0 \}$$

$$V := \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid \sum_{i=1}^{n} v_i^2 < 1 \} \rightsquigarrow (O', V, \mathfrak{v}) \in LC(S^2; \mathbb{R}^2)$$

$$\mathfrak{v} : O' \to V, \quad x \mapsto (x_1, x_3)$$

$$(\mathfrak{v}^{-1} : V \to O', \quad v \mapsto (v_1, \sqrt{1-v_1^2-v_2^2}, v_2)\ )$$

$$
\begin{tikzcd}
u(O\cap O') \arrow[d, phantom, "\parallel"] & O\cap O' \arrow[l, "u"'] \arrow[r, "v"] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & v(O\cap O') \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
\{u\in U \mid u_2>0\} & \{x\in S^2 \mid x_2>0,\ x_3>0\} & \{v\in V \mid v_2>0\}
\end{tikzcd}
$$

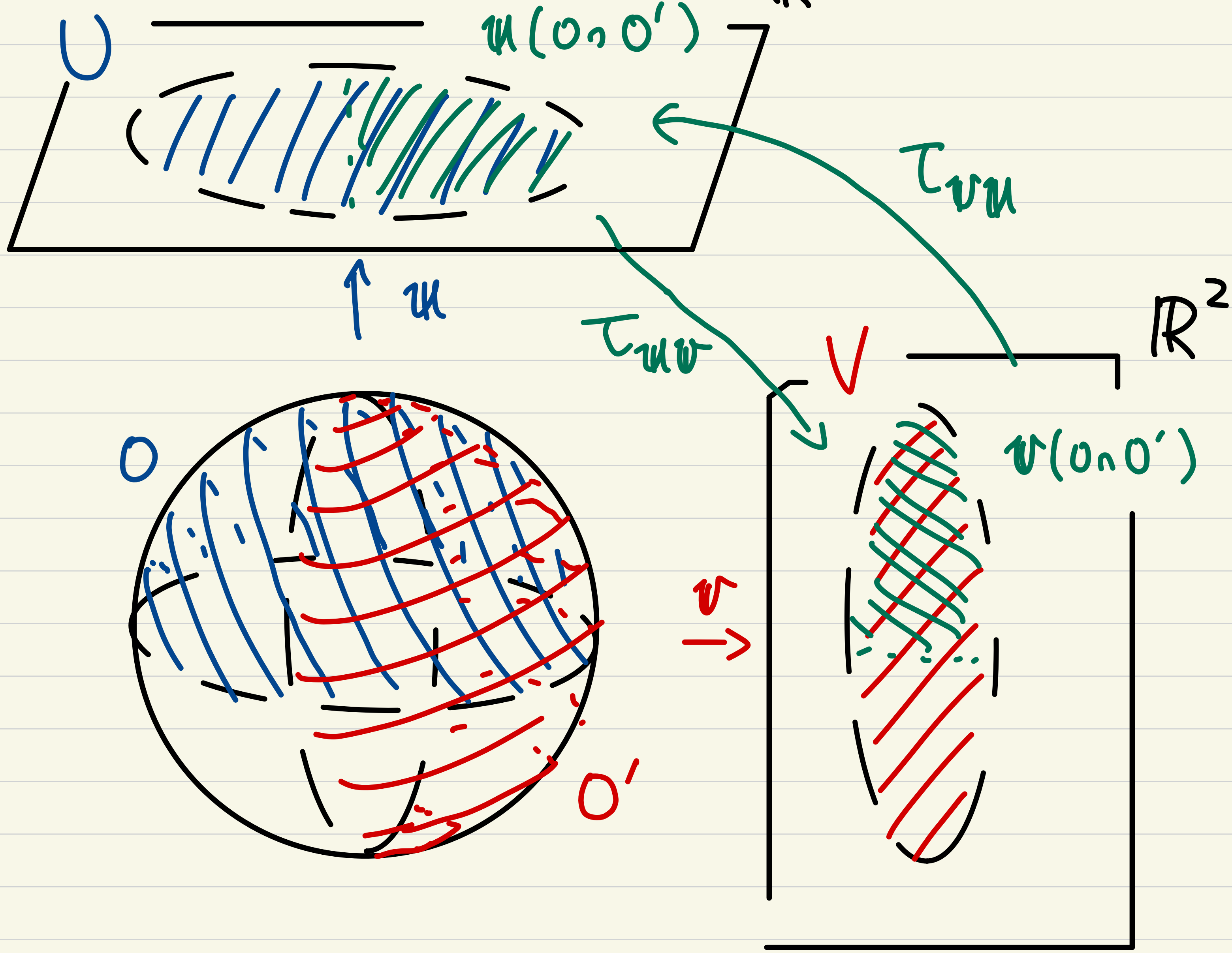
$$\{u\in U \mid u_2>0\} \overset{\text{open}}{\subset} U \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^2$$

$$\{v\in V \mid v_2>0\} \overset{\text{open}}{\subset} V \subset \mathbb{R}^2$$

$$u \overset{\tau_{uv}}{\longmapsto} v(u^{-1}(u)) = \left(u_1, \sqrt{1-u_1^2-u_2^2}\right)$$

$$\left(v_1, \sqrt{1-v_1^2-v_2^2}\right) = u(v^{-1}(v)) \overset{\tau_{vu}}{\longmapsfrom} v$$

イメージ



よく使う命題をいくつか述べておく.

↲ [illegible]

Prop 7.1.3 : $(O, U, \mathcal{U})$ から $(O, U, \mathcal{U})$ への座標変換

$\tau_{\mathcal{U}\mathcal{U}} : \mathcal{U}(O) \to \mathcal{U}(O)$ は恒等写像

Prop 7.1.4 :

$(O, U, \mathcal{U})$ から $(O', V, \mathcal{V})$ への座標変換

$\tau_{\mathcal{U}\mathcal{V}} : \mathcal{U}(O \cap O') \to \mathcal{V}(O \cap O')$

と $(O', V, \mathcal{V})$ から $(O, U, \mathcal{U})$ への座標変換

$\tau_{\mathcal{V}\mathcal{U}} : \mathcal{V}(O \cap O') \to \mathcal{U}(O \cap O')$

は互いに逆写像

Prop 7.1.5: $(O_i, U_i, \mathcal{U}_i) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$ $(i=1,2,3)$ とし,

このとき 各 $u \in \mathcal{U}_1(O_1 \cap O_2 \cap O_3)$ について

$$\tau_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}_3}(u) = \tau_{\mathcal{U}_2\mathcal{U}_3}\left(\underbrace{\tau_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2}(u)}_{\in\, \mathcal{U}_2(O_1 \cap O_2 \cap O_3)}\right).$$

Section 7.1 終

Section 7.2：座標変換の C^∞ 性

設定：　M：位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$

記号　τ_{uv}：(O, U, u) から (O', V, v) への座標変換

τ_{vu}：(O', V, v) から (O, U, u) への座標変換

Q: 座標変換

$$\tau_{uv} : \underset{\mathbb{R}^n \,\underset{\text{open}}{\supset}}{u(O\cap O')} \to \underset{\mathbb{R}^n \,\underset{\text{open}}{\supset}}{v(O\cap O')}$$

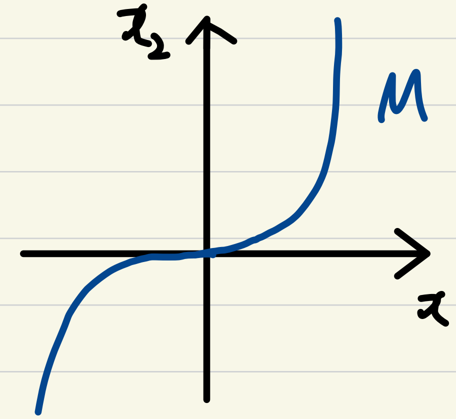
$$\tau_{vu} : v(O\cap O') \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n \to u(O\cap O') \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$$

は共に C^∞ 級写像 かし?

A: No!

Ex 7.2.1 :

$M := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^3 \} \subset \mathbb{R}^2$ とする.



$O := M$

$U := \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow (O, U, u) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R})$

$u : O \to U, \ x \mapsto x_1$ (同相)

$(u^{-1} : U \to O, \ u \mapsto (u, u^3))$

$O' := M$

$V := \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow (O', V, v) \in \mathcal{LC}(M;\mathbb{R})$

$v : O' \to V, \ x \mapsto x_2$ (同相)

$(v^{-1} : V \to O', \ v \mapsto (v^{1/3}, v))$

このとき

$$O \cap O' = M, \quad u(O \cap O') = \mathbb{R}, \quad v(O \cap O') = \mathbb{R}$$

であって

$$\tau_{uv} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto v(u^{-1}(u)) = u^3$$

$$\tau_{vu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto u(v^{-1}(v)) = v^{\frac{1}{3}}$$

$\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級ではない

（原点で微分不可能）

注："$u: O \to U$ は C^∞ 級か？"という問は

まだ意味を持たない！

(いまのところ
"C^∞ 級写像"はどんな写像に対して
定義されうる概念か
(cf. Section 5))

講義全体を通じたキーポイント：

座標変換や C^∞ 級写像だとうれしい…!!

Section 8 で説明する.

Ex 7.2.2 : Ex 7.1.2 の設定で考える.

$$\mathfrak{u}(O\cap O') \xleftarrow{\mathfrak{u}} O\cap O' \xrightarrow{\mathfrak{v}} \mathfrak{v}(O\cap O')$$

$$\mathfrak{u}(O\cap O') = \left\{ u\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} u_1^2+u_2^2<1 \\ u_2>0 \end{matrix} \right\} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^2$$

$$O\cap O' = \{x\in S^2 \mid x_2>0,\ x_3>0\}$$

$\mathbb{R}^3$ の開集合ではない

$$\mathfrak{v}(O\cap O') = \left\{ v\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} v_1^2+v_2^2<1 \\ v_2>0 \end{matrix} \right\} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^2$$

座標変換

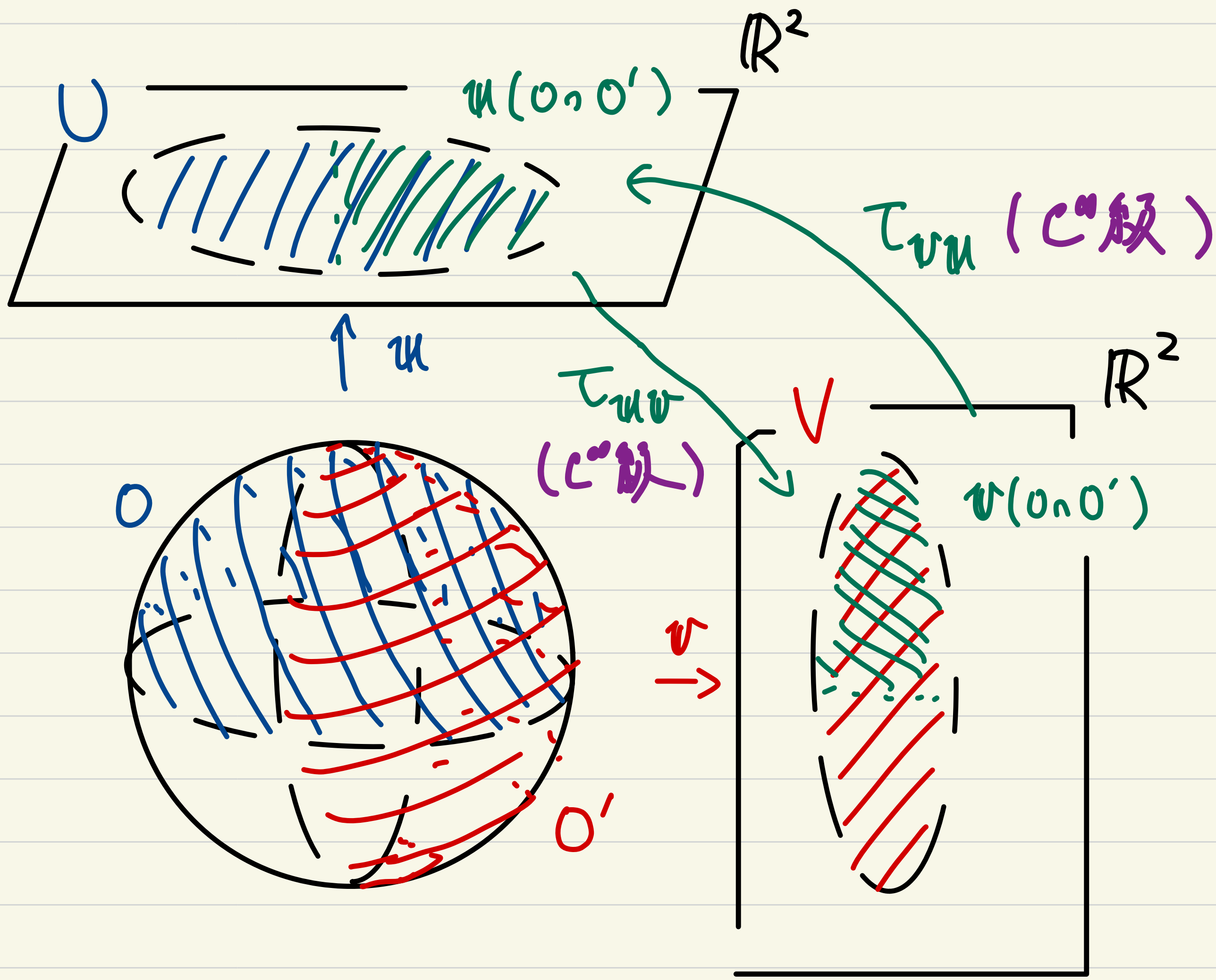
$$T_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} : \mathfrak{u}(O\cap O') \to \mathfrak{v}(O\cap O'),\quad u \mapsto \left(u_1, \sqrt{1-u_1^2-u_2^2}\right)$$

$$T_{\mathfrak{v}\mathfrak{u}} : \mathfrak{v}(O\cap O') \to \mathfrak{u}(O\cap O'),\quad v \mapsto \left(v_1, \sqrt{1-v_1^2-v_2^2}\right)$$

はどちらも C^∞ 級

(cf. Ex 3.2.4, Prop 5.1.3 : 定義域に注意)

イメージ



Section 7.2 終

Section 7.3 C^∞-atlas

この節では C^∞-atlas (地図帳) を定義する.

設定 : M : 位相空間
$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号 : $LC(M;\mathbb{R}^n)$: M の n 次元局所座標系全体の集合

Def. 7.3.1

$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$ が M の $\underbrace{C^\infty\text{-atlas}}$ （n次元）

地図帳

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ① $\displaystyle\bigcup_{(O,U,u)\in\mathcal{A}_0} O = M$

かつ

Mのすべての地点をカバー

② ${}^\forall(O,U,u), {}^\forall(O',V,v) \in \mathcal{A}_0$

座標変換 $\tau_{uv} : u(O\cap O') \to v(O\cap O')$

$u \mapsto v(u^{-1}(u))$

は C^∞級写像

地図同士の整合性がとれている

Ex 7.3.2 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし

$$S^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

とする.

各 $k = 1, \cdots, n+1$ について

$$O_k^+ := \{ x \in S^n \mid x_k > 0 \}$$

$$U_k^+ := \left\{ u \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1 \right\}$$

$$\mathcal{U}_k^+ : O_k^+ \to U_k^+, \quad x \mapsto (x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1})$$

$$\left((\mathcal{U}_k^+)^{-1} : U_k^+ \to O_k^+, \quad u \mapsto \left(u_1, \cdots, u_{k-1}, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}, u_k, \cdots, u_n\right) \right)$$

とおくと $(O_k^+, U_k^+, \mathcal{U}_k^+) \in \mathcal{LC}(S^n; \mathbb{R}^n)$

また各 $k=1,\cdots,n+1$ について

$O_k^- := \{x \in S^n \mid x_k < 0\}$

$U_k^- := \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1\}$

$\mathfrak{u}_k^- : O_k^- \to U_k^-,\ x \mapsto (x_1,\cdots,x_{k-1},x_{k+1},\cdots,x_{n+1})$

$\left((\mathfrak{u}_k^-)^{-1} : U_k^- \to O_k^-,\ u \mapsto \left(u_1,\cdots,u_{k-1},-\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n} u_i^2},u_k,\cdots,u_n\right)\right)$

とおくと $(O_k^-, U_k^-, \mathfrak{u}_k^-) \in \mathcal{LC}(S^n;\mathbb{R}^n)$

Claim

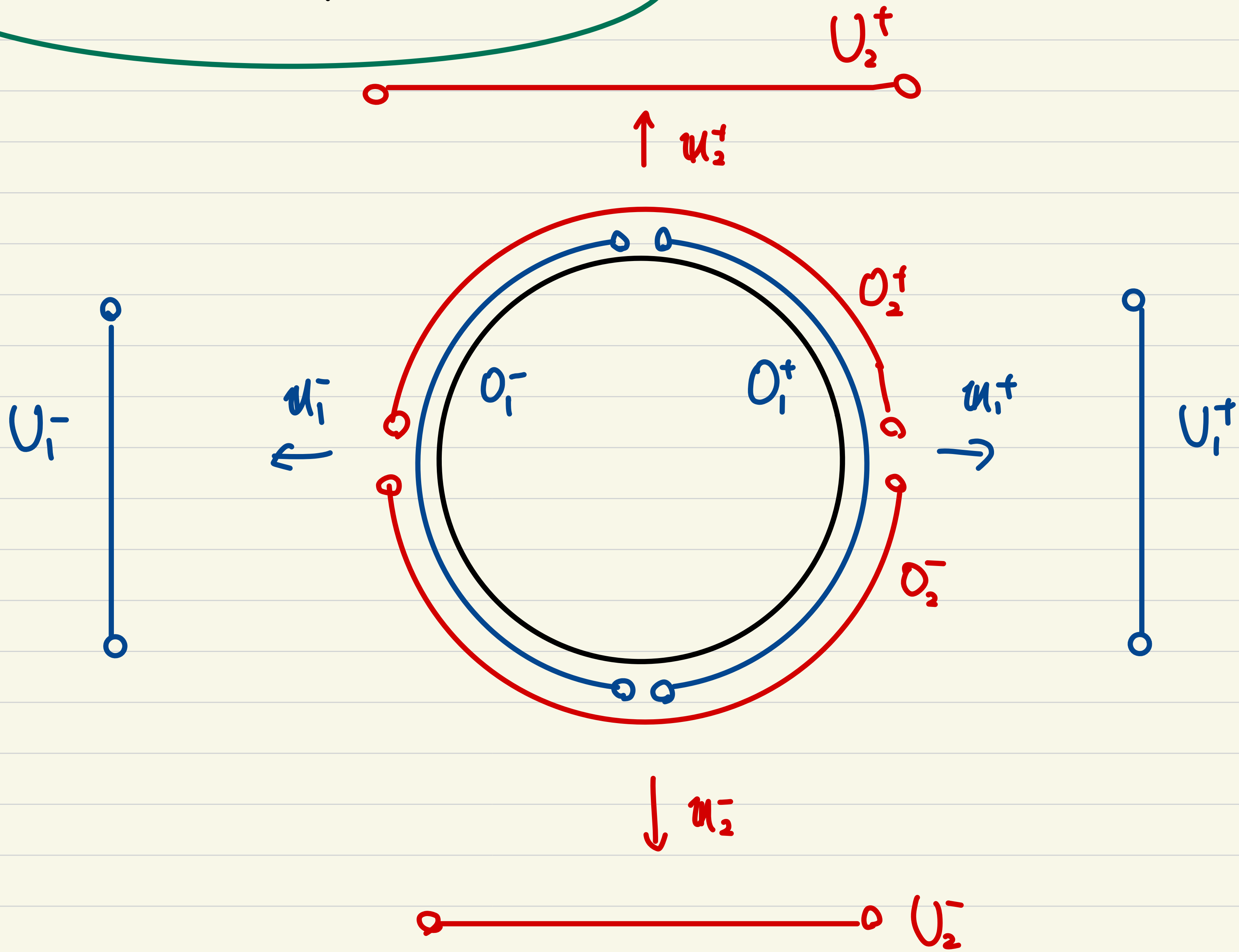
$A_0 := \{(O_k^+, U_k^+, \mathfrak{u}_k^+) \mid k=1,\cdots,n+1\}$

$\cup \{(O_k^-, U_k^-, \mathfrak{u}_k^-) \mid k=1,\cdots,n+1\}$

$\subset \mathcal{LC}(S^n;\mathbb{R}^{n+1})$

は S^n 上の C^∞-atlas である.

イメージ：$n=1$ の場合



①について：$\displaystyle\bigcup_{(O,U,u)\in A_0} O \subset S^n$ は明らか

以下を示せばよい

示 $\displaystyle\bigcup_{(O,U,u)\in A_0} O \supset S^n$

i.e. ${}^\forall x \in S^n,\ {}^\exists (O,U,u)\in A_0,\ x\in O$

${}^\forall x\in S^n$ をとる。$\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ より ${}^\exists k=1,\cdots,n+1,\ x_k\neq 0$

$x_k>0$ のとき $x\in O_k^+ \quad ((O_k^+, U_k^+, u_k^+)\in A_0)$

$x_k<0$ のとき $x\in O_k^- \quad ((O_k^-, U_k^-, u_k^-)\in A_0)$

(① 証明終)

② について；

示） $^\forall(O, U, u), {}^\forall(O', V, v) \in \mathcal{A}_0$

$\tau_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$ は C^∞級写像

$(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{A}_0$ を任意にとる.

$(O, U, u) = (O', V, v)$ の場合は

座標変換 $\tau_{uu} : u(O) \to u(O)$

は恒等写像 (cf. Prop 7.1.2) となり，特に C^∞級写像

$(O, U, u) \neq (O', V, v)$ の場合を考える.

$k_1, k_2 = 1, \cdots, n+1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = +$ or $-$ として,

$$(O, U, u) = (O^{\varepsilon_1}_{k_1}, U^{\varepsilon_1}_{k_1}, u^{\varepsilon_1}_{k_1})$$
$$(O', V, v) = (O^{\varepsilon_2}_{k_2}, U^{\varepsilon_2}_{k_2}, u^{\varepsilon_2}_{k_2})$$
とおく.

$k_1 = k_2$ の場合は $O \cap O' = \emptyset$ となる.

特に $\tau_{uu} : \emptyset \to \emptyset$ は C^∞ 級なので ok.

$k_1 \neq k_2$ の場合のみ考えればよい.

Case 1 : $k_1 < k_2$ のとき

定義に従って計算すると　　　　　　　　記号の乱用

$$O \cap O' = \{ x \in S^n \mid \varepsilon_1 x_{k_1} > 0,\ \varepsilon_2 x_{k_2} > 0 \}$$

注意

$$u(O \cap O') = \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1,\ \varepsilon_2 u_{k_2 - 1} > 0 \}$$

$$v(O \cap O') = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} v_i^2 < 1,\ \varepsilon_1 v_{k_1} > 0 \}$$

逆写像の形に注意して計算すると

$$\tau_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$$

$$u \mapsto \left(u_1, \cdots, u_{k_1 - 1}, \varepsilon_1 \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}, u_{k_1}, \cdots u_{k_2 - 2}, u_{k_2}, \cdots, u_n \right)$$

これは C^∞ 級写像 (cf. Prop 5.1.3 & Ex 3.2.4)

Case 2 : $k_1 > k_2$ のとき

定義に従って計算すると

$$O \cap O' = \{ x \in S^n \mid \varepsilon_2 x_{k_2} > 0, \varepsilon_1 x_{k_1} > 0 \}$$

$$u(O \cap O') = \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} u_i^2 < 1, \varepsilon_2 u_{k_2} > 0 \}$$

$$v(O \cap O') = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} v_i^2 < 1, \varepsilon_1 v_{k_1 - 1} > 0 \}$$

注意

逆写像の形に注意して計算すると

$$\tau_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$$

$$u \mapsto \left(u_1, \cdots, u_{k_2 - 1}, u_{k_2 + 1}, \cdots u_{k_1 - 1}, \varepsilon_2 \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2}, u_{k_1}, \cdots, u_n \right)$$

これは C^∞ 級写像 (cf. Prop 5.1.3 & Ex 3.2.4)

Section 7.3 終

圓