Section 8 : C^∞級関数 on C^∞-atlas

C^∞-atlas で定まっている位相空間において
"C^∞級関数"を定義する.

Part II : 可微分多様体の定義

Section 6　局所座標系

Section 7　座標変換と C^∞-atlas

Section 8　C^∞級関数 on C^∞-atlas

Section 9　極大 C^∞-atlas

Section 10　C^∞級多様体

Section 11　射影空間

Section 8.1：局所座標系上の C^∞ 級関数

設定： M：位相空間， $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

(O, U, u)：M 上の n 次元局所座標系

$\left(\text{i.e.} \quad O \underset{\text{open}}{\subset} M, \quad U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n, \quad u : O \xrightarrow{\simeq} U : \text{同相} \right)$

記号： $C(M) := \{ f : M \to \mathbb{R} \mid \text{連続} \}$

各 $U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ について

$C^\infty(U) := \{ h : U \to \mathbb{R} \mid C^\infty \text{級} \} \subset C(U)$

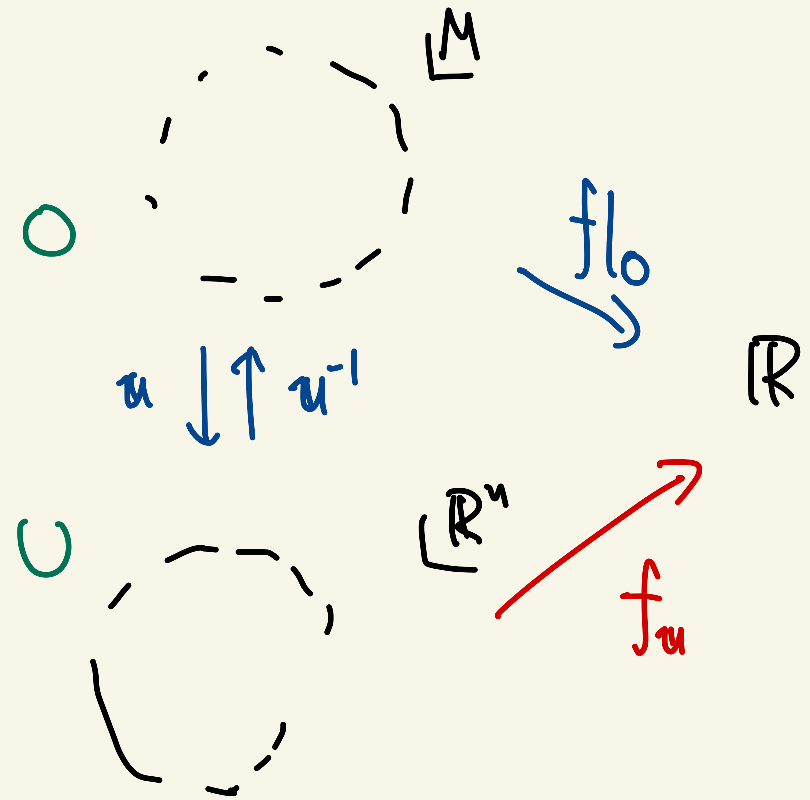
超重要

注：“$C^\infty(M)$” はまだ定義されていない

Def 8.1.1 各関数 $f: M \to \mathbb{R}$ について

$$f_u := (u^{-1})^*(f|_O) : U \to \mathbb{R}$$ とおく.

（つまり $f_u = f \circ u^{-1} : U \to \mathbb{R}$, $u \mapsto f(u^{-1}(u))$ ）



O上の関数 $f|_O$ を地図 U 上でみているのが f_u

Def 8.1.2 : $f: M \to \mathbb{R}$ が (O, U, u) 上 C^∞ 級

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad f_u \in C^\infty(U)$$

Ex 8.1.3　$S^1 := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^2$ について

$O := \{ x \in S^1 \mid x_2 > 0 \} \underset{\text{open}}{\subset} S^1$

$U := (-1, 1) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$

$\mathfrak{u} : O \xrightarrow{\sim} U, \quad x \mapsto x_1$

$\left(\mathfrak{u}^{-1} : U \xrightarrow{\sim} O, \quad u \mapsto (u, \sqrt{1 - u^2}) \right.$

は S^1 の1次元局所座標系 (Ex 6.2.3)$\Big)$.

$f : S^1 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_2$ について考える.

このとき

$$f_{\mathfrak{u}} : \underset{\underset{\mathbb{R}}{\cap\ \text{open}}}{U} \to \mathbb{R},\quad u \longmapsto f((\mathfrak{u})^{-1}(u))$$

$$= f(u, \sqrt{1-u^2})$$

$$= \sqrt{1-u}$$

必ず書いて欲しい

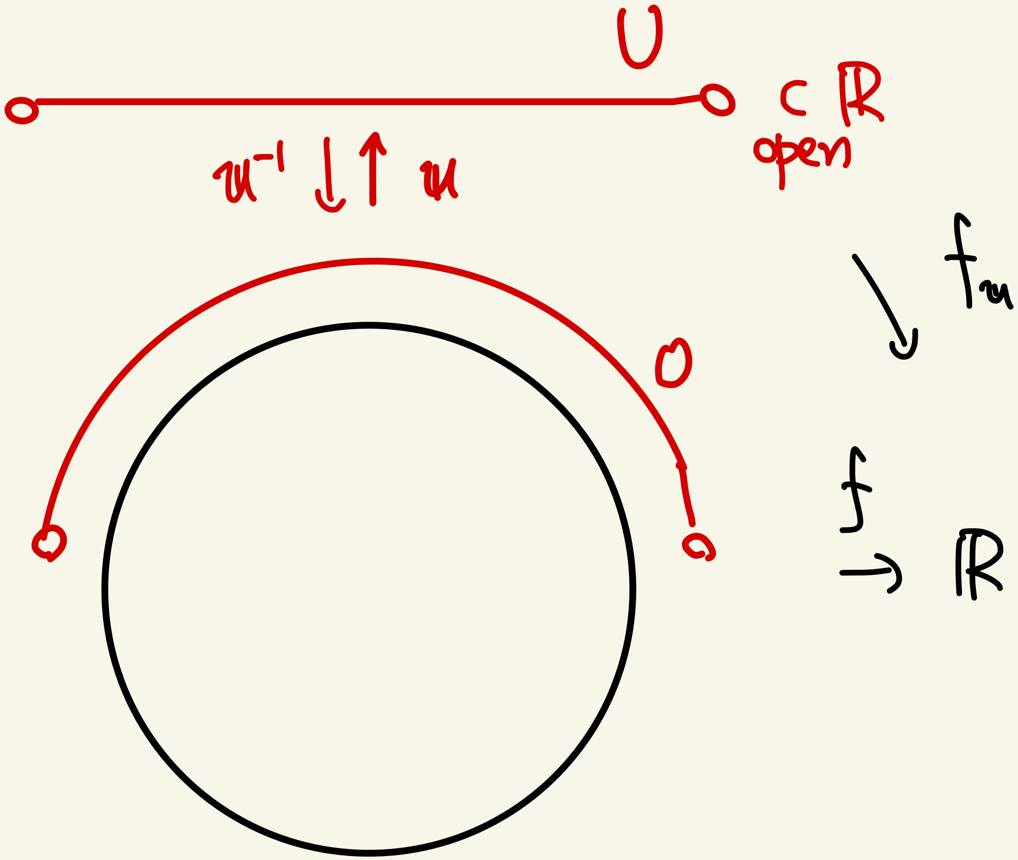
従って

$f_{\mathfrak{u}}$ は $U = (-1,1)$ 上 C^∞ 級 (Ex 3.2.4) なので

f は $(O, U, \mathfrak{u})$ 上 C^∞ 級

重要 : "$f : S^1 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_2$ は C^∞ か?" は「まだ」意味がない

イメージ図



Section 8.1 終わり

Section 8.2 : C^∞-atlas 上の C^∞級関数

設定: M : 位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$: M 上の n次元 C^∞-atlas

記号: $C(M) := \{ f : M \to \mathbb{R} \mid 連続 \}$

各 $U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ について

$C^\infty(U) := \{ h : U \to \mathbb{R} \mid C^\infty級 \} \subset C(U)$

超重要

注: "$C^\infty(M)$" はまだ定義されていない

Def 8.2.1 : 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が $(M, \mathcal{A}_0)$ 上 C^∞ 級

$\overset{\text{def}}{\iff} \forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_0,$

$f_u \in C^\infty(U)$

Ex 8.2.2:

$S^1 := \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^2$ について

Ex 7.3.2 で構成した

1次元 C^∞-atlas $\mathcal{A}_0 = \{ (O_k^+, U_k^+, u_k^+) \mid k = 1, 2 \}$

$\cup \{ (O_k^-, U_k^-, u_k^-) \mid k = 1, 2 \}$

4枚の地図から成る atlas

を考える.

$$f : S^1 \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x_2$$

について考える.

Claim f は $(S^1, \mathcal{A}_0)$ 上 C^∞ 級

示 f は $(O_k^\varepsilon, U_k^\varepsilon, u_k^\varepsilon)$ 上 C^∞ 級 $\left({}^\forall\varepsilon = \pm,\ {}^\forall k = 1, 2\right)$

i.e. $f_{u_k^\varepsilon} \in C^\infty(U_k^\varepsilon)$ $\left(\begin{array}{l} {}^\forall\varepsilon = \pm \\ {}^\forall k = 1, 2 \end{array}\right)$

計算すると

(ε, k)	$f_{u_k^\varepsilon} : U_k^\varepsilon \to \mathbb{R}$
$(+, 1)$	$f_{u_1^+} : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ u \mapsto u$
$(+, 2)$	$f_{u_2^+} : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ u \mapsto \sqrt{1-u^2}$
$(-, 1)$	$f_{u_1^-} : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ u \mapsto u$
$(-, 2)$	$f_{u_2^-} : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ u \mapsto -\sqrt{1-u^2}$

となり、これらはいずれも C^∞ 級 ∎

注：一般には A_0 はとてつもなくたくさん地図を持っていることもあり得る．（Section 9 で詳しくみる）

以下の定理は便利（後で使う）：

Thm 8.2.3：$\overset{\text{関数}}{f} : M \to \mathbb{R}$ について以下は同値

(i) f は (M, A_0) 上 C^∞ 級 $\left(\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^\forall (O, U, u) \in A_0,\ f_u \in C^\infty(U) \right)$

$\Updownarrow$

(ii) ${}^\forall p \in M$, ${}^\exists (O, U, u) \in A_0$ with $p \in O$ かつ $\underset{\overset{\shortparallel}{f \circ u^{-1}}}{f_u} \in C^\infty(U)$

座標変換が C^∞ 級写像であることが効いている！

Thm 8.2.3 の証明の準備

以下を思い出しておく：

Thm 8.2.4 $U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$

$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: U の開被覆 とする.

$\left\{ \begin{array}{l} U_\lambda \subset U \text{ : open } (\forall\lambda) \\ \text{かつ} \\ \bigcup_\lambda U_\lambda = U \end{array} \right.$ の意味と同.

関数 $h: U \to \mathbb{R}$ について 以下は同値

① $h \in C^\infty(U)$

$\Updownarrow$

② $h|_{U_\lambda} \in C^\infty(U_\lambda)$ $(\forall\lambda\in\Lambda)$

Proof of Thm 8.2.3 : (i) ⇒ (ii) : easy

(ii) ⇒ (i) を示す. (ii) を仮定する. (i) を示す.

$\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_0$ をとる.

示 $f_u \in C^\infty(U)$

いま (ii) を仮定しているので

各 $p \in O$ に対して $(O_p, U_p, u_p) \in \mathcal{A}_0$ であって

$p \in O_p$ かつ $f_{u_p} \in C^\infty(U_p)$ となるものがとれるのでとる.

ここで各 $p \in O$ について

$\{u(O \cap O_p)\}_{p \in O}$ は U の開被覆.

Thm 5.2.4 より以下を示せばよい

示 $\forall p \in O$, $f_u|_{u(O \cap O_p)} \in C^\infty(u(O \cap O_p))$

$\forall p \in O$ をとる.

$(O', V, v) := (O_p, U_p, u_p)$ とおく.

㊉示 $f_u \big|_{u(O \cap O')} \in C^\infty(u(O \cap O'))$

いま $(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{A}_0$ なので

座標変換

$$\begin{aligned} \tau_{uv} : \underset{\mathbb{R}^n \underset{\text{open}}{\supset}}{u(O \cap O')} &\to v(O \cap O') \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto v(u^{-1}(u)) \end{aligned}$$

は C^∞級写像

ここで $f_v \in C^\infty(V)$ $\left(\overset{\text{i.e.}}{} f_{u_p} \in C^\infty(U_p)\right)$ より

$$f_v\Big|_{v(O\cap O')} \in C^\infty(v(O\cap O')) \quad \left(\because\ v(O\cap O') \underset{\text{open}}{\subset} V \text{ と Prop 3.1.5}\right)$$

また定義より

$$f_u\Big|_{u(O\cap O')} = \tau_{uv}^*\Big(\underbrace{f_v\Big|_{v(O\cap O')}}_{C^\infty}\Big) \quad (\text{詳細略})$$

となるので

$$f_u\Big|_{u(O\cap O')} \in C^\infty(u(O\cap O'))$$

図

メモ：
次も成り立つ．

Prop 8.2.5

関数 $f: M \to \mathbb{R}$ が $(M, \mathcal{A}_0)$ 上 C^∞ 級のとき

f は連続

Section 8.2
終

Section 8.3 : C^∞-atlas 上の C^∞ 級関数のなす $\mathbb{R}$ 代数

設定 : M : 位相空間 , $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{LC}(M ; \mathbb{R}^n)$: M 上の n 次元 C^∞-atlas

Def 8.3.1 : $C^\infty(M;A_0) := \{ f \in C(M) \mid f$ は (M, A_0) 上 C^∞ 級 $\}$

とおく.

重要

Thm 8.3.2 : $C^\infty(M;A_0)$ は $C(M)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数.

特に $C^\infty(M;A_0)$ は $\mathbb{R}$ 代数

Thm 5.3.2 の証明の準備：

Prop 5.3.3：$(V_1, \cdot)$, $(V_2, \cdot)$: $\mathbb{R}$代数

$W \subset V_2$: 部分$\mathbb{R}$代数

$\varphi : V_1 \to V_2$: $\mathbb{R}$代数準同型 とする.

このとき

$\varphi^{-1}(W)$ は V_1 の 部分$\mathbb{R}$代数

Lem 8.3.4: 各 $(O, U, u) \in \mathcal{A}_0$ について

$\varphi_u : C(M) \to C(U)$ は $\mathbb{R}$ 代数準同型

$f \mapsto f_u$

Proof of Thm 8.3.2

Prop 8.3.3, Lem 8.3.4

Prop 2.2.2, Prop 2.2.4

Cor 3.3.3

を使う (詳細略)

Section 8.3 終