Section 9 : 極大 C^∞-atlas

Part II : 可微分多様体の定義

Section 9.1 : 極大 C^∞-atlas

設定 : M : 位相空間

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Def 9.1.1 :

$$C^\infty\text{-atlas}(M;\mathbb{R}^n) := \left\{ \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \mathcal{A}_0 \text{ は } M \text{ 上の } n \text{ 次元 } C^\infty\text{-atlas} \right\}$$

この講義の独自記号

Recall: 各 $\mathcal{A}_0 \in C^\infty\text{-atlas}(M;\mathbb{R}^n)$ について

$C^\infty(M;\mathcal{A}_0) \subset C(M)$ が定まる。(Section 8)

Thm 9.1.2: $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0' \in C^\infty\text{-atlas}(M;\mathbb{R}^n)$

with $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_0'$ について

$$C^\infty(M;\mathcal{A}_0) = C^\infty(M;\mathcal{A}_0')$$

C^∞-atlas である限り、地図を追加しても "$C^\infty(M)$" は変わらない

〜〜〜 たくさん地図がある方が便利

(Hint: $C^\infty(M;\mathcal{A}_0) \supset C^\infty(M;\mathcal{A}_0')$ は定義から

$\subset$ は Thm 8.2.4 から

従う。)

Def 9.1.3

M の C^∞-atlas $\mathcal{A} \in C^\infty\text{-atlas}(M;\mathbb{R}^n)$ が極大

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{A} \subsetneqq \mathcal{B}$ となる C^∞-atlas $\mathcal{B} \in C^\infty\text{-atlas}(M;\mathbb{R}^n)$ が存在しない

Remark: $LC(M;\mathbb{R}^n)$ そのものは一般には C^∞-atlas になるとは限らない

(なる場合の方が珍しい)

Q : C^∞-atlas A_0 について，
それを含む極大 C^∞-atlas は存在する？

A : Yes !!
しかも そのような極大 C^∞-atlas は一意.

任意の地図帳は地図を追加して"完全版"にできる.

Def. 9.1.4: M の C^∞-atlas $\mathcal{A}_0 \in C^\infty\text{-atlas}(M;\mathbb{R}^n)$ について

$$[\mathcal{A}_0] := \left\{ (O, U, \varphi) \in LC(M;\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^\forall (O', V, \psi) \in \mathcal{A}_0 \\ \text{座標変換 } \tau_{\varphi\psi}, \tau_{\psi\varphi} \text{ は共に } C^\infty \text{級写像} \end{array} \right\}$$

“完全版”

$$\subset LC(M;\mathbb{R}^n)$$

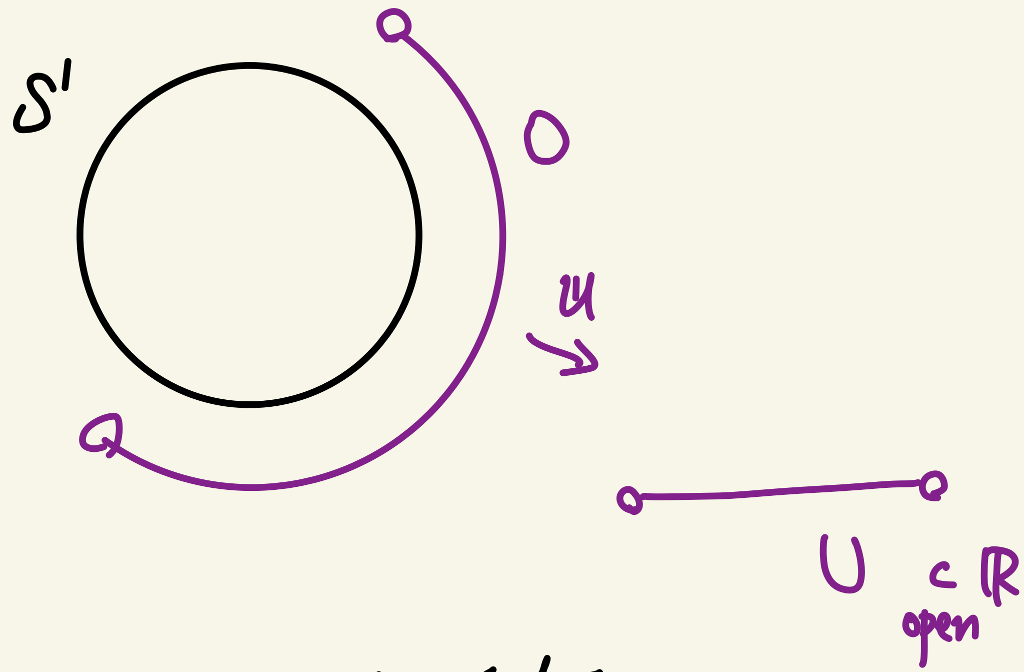
$\mathcal{A}_0$ の地図と整合性のとれるすべての地図を追加

Ex 9.1.5 : Ex 7.3.2 の $n=1$ の場合について.

$O = \{ x \in S^1 \mid x_1 > x_2 \}$

$U = (-1, 1) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi : O &\to U \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \end{aligned}$$



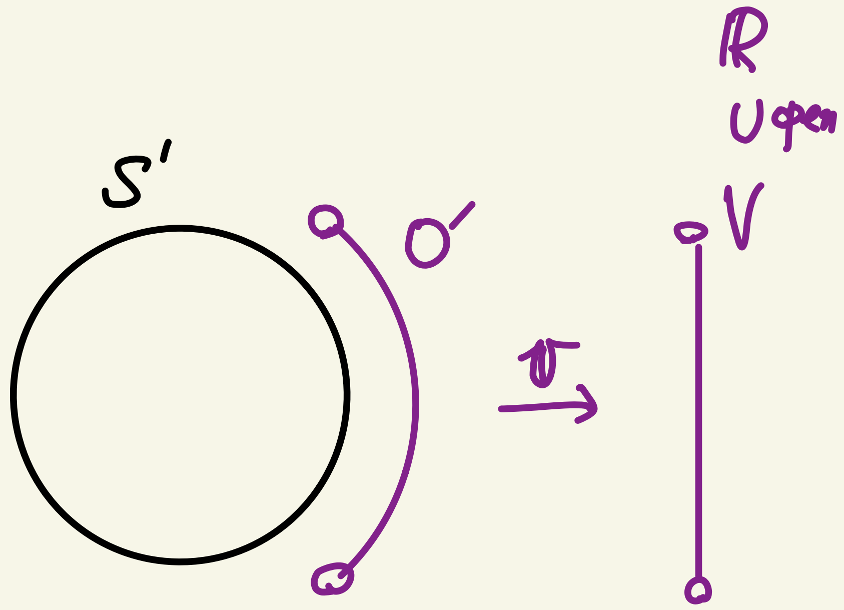
とすると $(O, U, \varphi) \notin \mathcal{A}_0$ だが $(O, U, \varphi) \in [\mathcal{A}_0]$

例:

$O' := \{ x \in S^1 \mid x_1 > \frac{1}{\sqrt{2}} \}$

$V := \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$

$\psi : O' \to V, \ x \mapsto x_2$



とすると $(O', V, \psi) \notin \mathcal{A}_0$ だが $(O', V, \psi) \in [\mathcal{A}_0]$.

Theorem 9.1.6: $\mathcal{A}_0 \in C^\infty\text{-atlas}(M;\mathbb{R}^n)$ とする.

このとき以下が成り立つ

(1) $\mathcal{A}_0 \subset [\mathcal{A}_0]$

(2) $[\mathcal{A}_0]$ は M の極大 C^∞-atlas

(3) $\mathcal{A}_0$ を含む M の極大 C^∞-atlas は $[\mathcal{A}_0]$ のみ

これより

$[\mathcal{A}_0]$ を $\mathcal{A}_0$ の定める極大 C^∞-atlas と呼ぶ.

証明は Section 9.2 （試験範囲外）

Prop 9.1.7 各 $\mathcal{A}_0 \in C^\infty\text{-atlas}(M;\mathbb{R}^n)$ について

$$C^\infty(M;\mathcal{A}_0) = C^\infty(M;[\mathcal{A}_0])$$

($\because$ Thm 9.1.2)

次の命題は便利

Prop 9.1.8 $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0 \in C^\infty\text{-atlas}(M : \mathbb{R}^n)$ とする.

以下は同値

(i) $[\mathcal{A}_0] = [\mathcal{B}_0]$

$\Updownarrow$

(ii) ${}^\forall(O, U, u) \in \mathcal{A}_0,\ {}^\forall(O', V, v) \in \mathcal{B}_0$

τ_{uv}, τ_{vu} は共に C^∞ 級写像

Hint: Theorem 9.1.6

Ex 9.1.9

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし,

$$S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

とする.

$(O_N, V_N, \psi_N), (O_S, V_S, \psi_S) \in LS(S^n; \mathbb{R}^n)$

を以下のように定める.

$O_N := S^n \setminus \{(0,0,\cdots,0,1)\}$ $\quad O_S := S^n \setminus \{(0,0,\cdots,0,-1)\}$

$V_N := \mathbb{R}^n$ $\quad V_S := \mathbb{R}^n$

$$\psi_N : O_N \to V_N \qquad \psi_S : O_S \to V_S$$

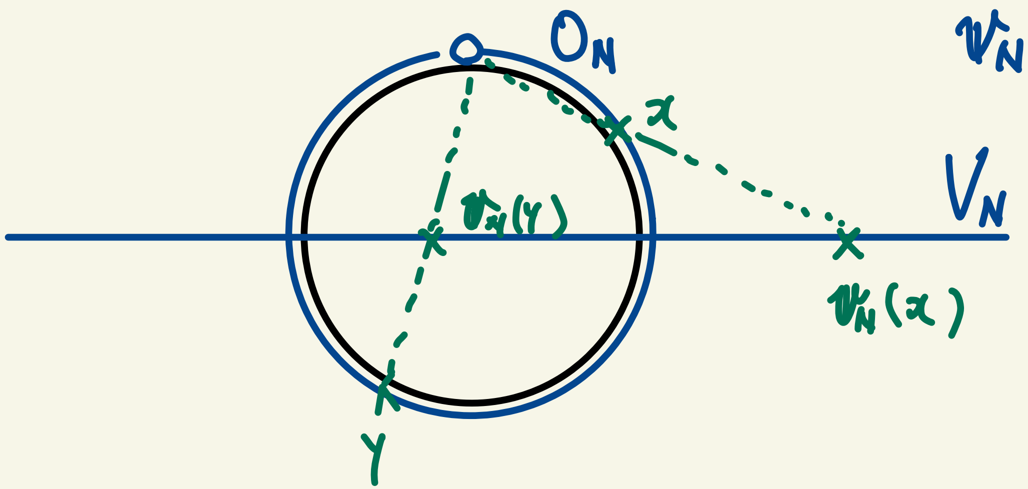
$$x \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right) \qquad x \mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \psi_N^{-1} : V_N \to O_N \\ v \mapsto \left(\dfrac{2v_1}{1+\sum_{i=1}^n v_i^2}, \cdots, \dfrac{2v_n}{1+\sum_{i=1}^n v_i^2}, \dfrac{-1+\sum_{i=1}^n v_i^2}{1+\sum_{i=1}^n v_i^2} \right) \end{array} \right)$$

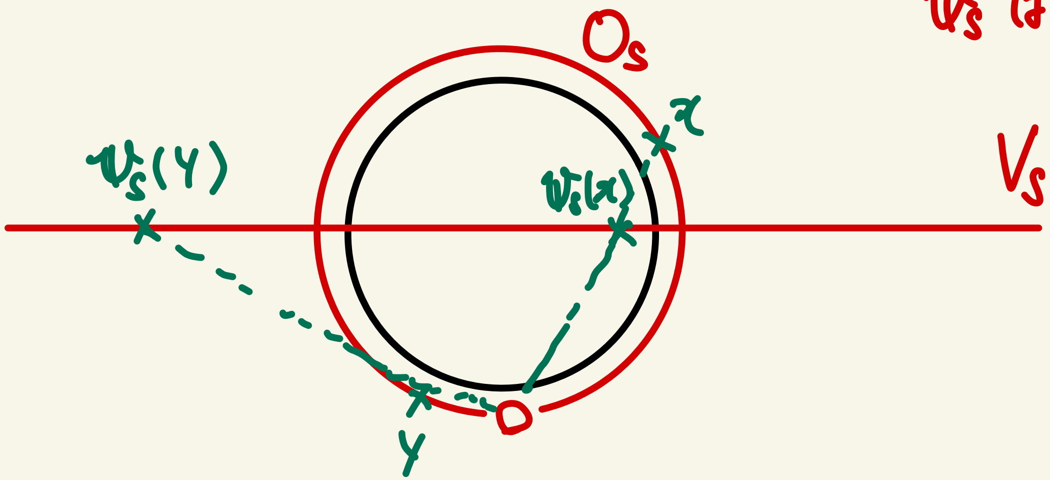
ψ_S^{-1} は省略

イメージ

$n=1$ のとき



ψ_N は"北極点"における立体射影



ψ_S は"南極点"における立体射影

このとき $\mathcal{B}_0 := \{(O_N, V_N, \psi_N), (O_S, V_S, \psi_S)\}$

は S^n の C^∞-atlas とする.

また $\mathcal{A}_0 := \{(O_k^{\pm}, U_k^{\pm}, \psi_k^{\pm}) \mid k = 1, \cdots, n+1\}$

を Ex 7.3.2 で扱った

S^n の C^∞-atlas とする.

Claim : $[\mathcal{B}_0] = [\mathcal{A}_0]$

$\mathcal{B}_0$ の完全版　$\mathcal{A}_0$ の完全版

Idea of Proof

Prop 9.1.8 より以下を示せばよい

示 $\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_0,\ \forall (O', V, v) \in \mathcal{B}_0$

T_{uv}, T_{vu} は共に C^∞ 級写像

ここでは

$$(O, U, u) = (O_1^+, U_1^+, u_1^+)$$
$$(O', V, v) = (O_N, V_N, v_N)$$

の場合のみ紹介する.

このとき

$$O \cap O' = O_1^+ \cap O_N = \{x \in S^n \mid x_1 > 0,\ x \neq (0, 0, \cdots, 0, 1)\}$$
$$= \{x \in S^n \mid x_1 > 0\}$$

さらに $u(O\cap O') = u_1^+(\{x\in S^n \mid x_1>0\})$

$= U_1^+ = \{u\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2<1\} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$

$v(O\cap O') = v_N(\{x\in S^n \mid x_1>0\})$

$= \{v\in\mathbb{R}^n \mid v_1>0\} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$

また $\tau_{uv}: u(O\cap O') \to v(O\cap O')$

$\quad\quad \{u\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2<1\} \quad\quad \{v\in\mathbb{R}^n \mid v_1>0\}$

これは C^∞ 級写像

(定義域注意)

$u \longmapsto \left(\frac{1-\sum_{i=1}^n u_i^2}{1-u_n}, \frac{u_1}{1-u_n}, \cdots, \frac{u_{n-1}}{1-u_n}\right)$

$\left((u_1^+)^{-1} \searrow \; \left(1-\sum_{i=1}^n u_i^2, u_1, \cdots, u_n\right) \nearrow v_N \right)$

$$\tau_{\mathcal{V}\mathcal{U}} : \mathcal{V}(O \cap O') \to \mathcal{U}(O \cap O')$$

$$\mathcal{V}(O \cap O') = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v_1 > 0 \}, \qquad \mathcal{U}(O \cap O') = \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2 < 1 \}$$

$$v \longmapsto \left(\frac{2v_2}{1+\sum_{i=1}^n v_i^2}, \cdots, \frac{2v_n}{1+\sum_{i=1}^n v_i^2}, \frac{-1+\sum_{i=1}^n v_i^2}{1+\sum_{i=1}^n v_i^2} \right)$$

これはC^∞級写像

$$\left(v \overset{\psi_N^{-1}}{\longmapsto} \left(\frac{2v_1}{1+\sum_{i=1}^n v_i^2}, \cdots, \frac{2v_n}{1+\sum_{i=1}^n v_i^2}, \frac{-1+\sum_{i=1}^n v_i^2}{1+\sum_{i=1}^n v_i^2} \right) \overset{u_1^+}{\longmapsto} \right)$$

他の場合もがんばって計算すると

座標変換がいずれもC^∞級写像

であることがわかる。 □

Section 9.2 : Thm 9.1.6 の証明

試験範囲外

再掲

Theorem 9.1.6 : $\mathcal{A}_0 \in C^\infty\text{-atlas}(M;\mathbb{R}^n)$ とする.

このとき 以下が成り立つ

(1) $\mathcal{A}_0 \subset [\mathcal{A}_0]$

(2) $[\mathcal{A}_0]$ は M の極大 C^∞-atlas

(3) $\mathcal{A}_0$ を含む M の極大 C^∞-atlas は $[\mathcal{A}_0]$ のみ

§1 準備:

設定: $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$U_i \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_i}$ $(i=1,2)$

Prop 9.2.1: 写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ について以下は同値.

(i) $\varphi : U_1 \to U_2$ は C^∞ 級写像

$\Updownarrow$

(ii) $\forall p \in U_1$, $\exists U_{1,p} \subset U_1$: p の開近傍 s.t.

$f|_{U_{1,p}} : U_{1,p} \to U_2$ は C^∞ 級写像

Hint: Prop 5.1.3: 演習問題73

Idea of Proof of Thm 9.1.6:

(1) は 定義から従う (要確認)

(2) を示す:

示 ① $[A_0]$ は C^∞-atlas

② $[A_0]$ は C^∞-atlas として極大

①を示す:

示 ㋑ $\bigcup_{(O,U,u)\in[A_0]} O = M$

㋺ $[A_0]$ 内の座標変換は C^∞ 級

㋑は(1)から従う(要確認)

㋺を示す

示 ${}^\forall(O,U,u), {}^\forall(O',V,v)\in[A_0]$

$\tau_{uv} : u(O\cap O') \to v(O\cap O')$

は C^∞ 級写像

$(O, U, u), (O', V, v) \in [\mathcal{A}_0]$ を任意にとる.

示 $\tau_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$ は

$\underset{\mathbb{R}^n}{\cap}$ open　　$\underset{\mathbb{R}^n}{\cap}$ open　C^∞級写像

Prop 9.2.1 より以下を示せばよい

示 ${}^\forall p \in u(O \cap O'), {}^\exists U_p \subset u(O \cap O')$: p の開近傍

s.t. $\tau_{uv}|_{U_p} : U_p \to v(O \cap O')$

は C^∞級写像

$p \in u(O \cap O')$ を任意にとる.

いま $\mathcal{A}_0$ は C^∞-atlas なので

$O \subset M$

$\cup$

$(O_0, U_0, u_0) \in \mathcal{A}_0$ であって $u^{-1}(p) \in O_0$

となるものでとれる.

ここで $U_p = u(\underbrace{O \cap O' \cap O_0}_{p\text{の開近傍 in } M}) \underset{\text{open}}{\subset} U$ とおく.

(示) $\tau_{uv}|_{U_p} : U_p \to v(O \cap O')$

は C^∞級写像

Prop 7.1.5 より　U_p を $\psi(O\cap O'\cap O_0)$ への写像として

$$\tau_{\mathfrak{u}\psi}\big|_{U_p} = \left(\tau_{\mathfrak{u}_0\psi}\big|_{\mathfrak{u}_0(O\cap O'\cap O_0)}\right)\circ\left(\tau_{\mathfrak{u}\mathfrak{u}_0}\big|_{\mathfrak{u}(O\cap O'\cap O_0)}\right)$$

$[A_0]$ の定義より　$\tau_{\mathfrak{u}_0\psi}$, $\tau_{\mathfrak{u}\mathfrak{u}_0}$ は C^∞ 級写像

それらの制限

$$\tau_{\mathfrak{u}_0\psi}\big|_{\mathfrak{u}_0(O\cap O'\cap O_0)},\quad \tau_{\mathfrak{u}\mathfrak{u}_0}\big|_{\mathfrak{u}(O\cap O'\cap O_0)}$$

も C^∞ 級写像

特に 合成 $\tau_{\psi\psi}|_{U_p} : U_p \to \psi(O \cap O' \cap O_0)$ も

C^∞ 級写像

(cf. Thm 5.4.1)

((ロ) 証明終)(① 証明終)

② は $[A_0]$ の定義と (1) から従う (要確認)

((2) 証明終)

(3) は「"A_0 を含む C^∞-atlas" は $[A_0]$ に含まれる」ことから従う (要確認) ∎