Section 10 : C^∞級多様体

Part II : 可微分多様体の定義

Section 6 局所座標系

Section 7 座標変換と C^∞-atlas

Section 8 C^∞級関数 on C^∞-atlas

Section 9 極大 C^∞-atlas

Section 10 C^∞級多様体

Section 11 射影空間

Section 10.1 ハウスドルフ空間

設定 : X : 位相空間

Def 10.1.1 : X が ハウスドルフ

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in X$ with $x \neq y$,

$\exists U_x, U_y$ s.t. $\begin{cases} U_x \text{ は } x \text{ の open nbd in } X \\ U_y \text{ は } y \text{ の open nbd} \\ U_x \cap U_y = \emptyset. \end{cases}$

次の性質が大事

Prop 10.1.2 : X : ハウスドルフとする.

$\forall C \subset X$: compact, C は closed in X.

よく使う事

Prop 10.1.3 : X : ハウスドルフ

$A \subset X$: subset.

A は相対位相についてハウスドルフ

Section 10.2 : C^∞級多様体

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

Def 10.2.1 : (M, A) が n次元C^∞級多様体　C^∞-n-mfd

可微分多様体　differentiable

滑らかな多様体　smooth

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$
- M は ハウスドルフ位相空間
- A は 極大n次元 C^∞-atlas on M

(Section 10.3 の最後に "なぜ" ハウスドルフを課すか" を説明します)

Rem "M は第二可算 (i.e. ∃可算開基)" を要請することも多い

この条件は"積分論"には必要

Ex 10.2.2 : 空集合は任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

C^∞-n-mfd (with $\mathcal{A} = \emptyset$)

Ex 10.2.3 : $U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ について

$\mathcal{A}_0 := \{(U, U, \mathrm{id}_U)\}$ は n 次元 C^∞-atlas.

特に $(U, [\mathcal{A}_0])$ は C^∞-n-mfd.

すでに $C^\infty(U; [\mathcal{A}_0]) = C^\infty(U; \mathcal{A}_0) = C^\infty(U)$.

Ex 10.2.4 : $S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

にかいて

$\mathcal{A}_0$ を Ex 7.3.2 で構成した C^∞-atlas とする.

このとき

$(S^n, [\mathcal{A}_0])$ は C^∞-n-mfd.

完全版

注 :

$\mathcal{B}_0$ を Ex 9.1.8 で構成した C^∞-atlas とすると,

$[\mathcal{A}_0] = [\mathcal{B}_0]$ なので

$$(S^n, [\mathcal{A}_0]) = (S^n, [\mathcal{B}_0])$$

C^∞-n-mfd として同じもの

Ex 10.2.5

$$M = \{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^3 \} \subset \mathbb{R}^2$$

について

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &:= \{ (M, \mathbb{R}, \varphi : M \to \mathbb{R}, x \mapsto x_1) \} \\ \mathcal{B}_0 &:= \{ (M, \mathbb{R}, \psi : M \to \mathbb{R}, x \mapsto x_2) \} \end{aligned}\right\} \in C^\infty\text{-atlas}(M ; \mathbb{R}).$$

特に $(M, [\mathcal{A}_0])$ と $(M, [\mathcal{B}_0])$ はそれぞれ C^∞-1-mfd.

注: $[\mathcal{A}_0] \neq [\mathcal{B}_0]$ なので

$$(M, [\mathcal{A}_0]) \neq (M, [\mathcal{B}_0])$$

(ただし両者は"微分同相"ではある
後でdefする)

Ex 10.2.6 :

$D := \{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x_1 = 0 \text{ or } x_2 = 0}_{\Updownarrow \; x_1 x_2 = 0} \} \subset \mathbb{R}^2$ とする.

Q : D は C^∞-mfd ?

A : No!

Prop 10.2.7 : $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,
$\nexists (O, U, u) \in LC(D; \mathbb{R}^n)$ with $(0,0) \in O$

(証明は試験範囲外)

$\rightsquigarrow$ D は C^∞-atlas を持たない.

Section 10.3 : 開部分多様体

試験範囲外

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

Thm 10.3.1 : $(M, \mathcal{A})$: C^∞-n-mfd
$\Omega \subset M$: open
とする.

このとき

$$\mathcal{A}_\Omega := \{ (O \cap \Omega, u(O \cap \Omega), u|_{O \cap \Omega} : O \cap \Omega \to u(O \cap \Omega)) \mid (O, U, u) \in \mathcal{A} \}$$

とおくと $(\Omega, \mathcal{A}_\Omega)$ は C^∞-n-mfd.

開部分多様体 (open submanifold)

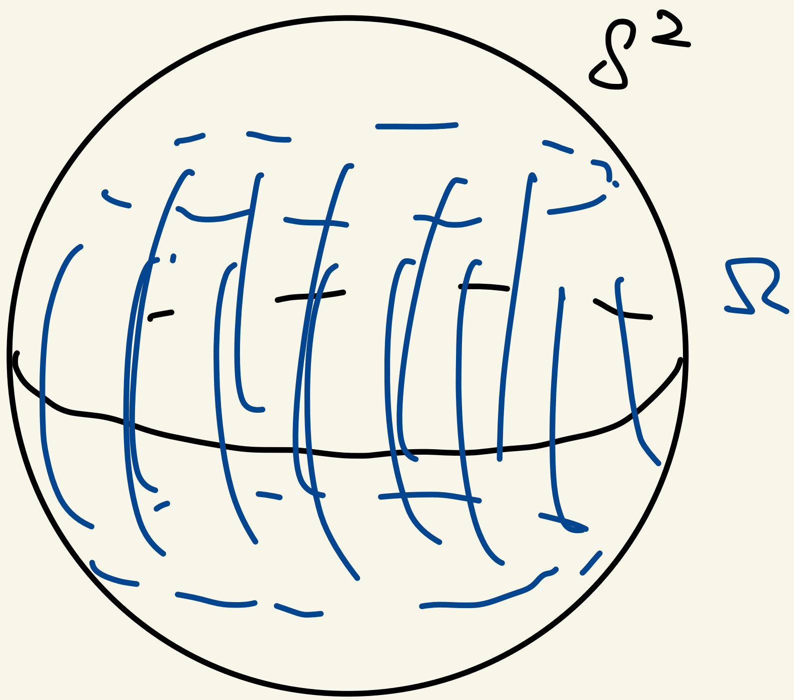
(Hint : Prop 6.2.4)

Ex 10.3.2

$(S^2, [A_0])$ は C^∞-2-mfd

$\Omega := \{ x \in S^2 \mid -\frac{1}{2} < x_3 < \frac{1}{2} \} \underset{\text{open}}{\subset} S^2$ とおくと

(Ω, A_Ω) も C^∞-2-mfd



Thm 10.3.3: $(M, \mathcal{A})$: C^∞-n-mfd.

$\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: M の開被覆 とする.

関数 $f: M \to \mathbb{R}$ (連続性課さない) について以下は同値

(i) $f \in C^\infty(M; \mathcal{A})$

$\Updownarrow$

(ii) ${}^\forall \lambda \in \Lambda$, $f|_{\Omega_\lambda} \in C^\infty(\Omega_\lambda, \mathcal{A}_{\Omega_\lambda})$

↑ M のハウスドルフ性は使わない

準備：

Prop 10.3.4 (M, A) : C^∞-n-mfd.

$\Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$

$f \in C^\infty(M; A)$ について

$f|_\Omega \in C^\infty(\Omega; A_\Omega)$

Proof : $f \in C(M)$ より $f|_\Omega \in C(\Omega)$.

$\forall (O, U, u) \in A$ を fix 示) $f|_{u(O\cap\Omega)} \in C^\infty(u(O \cap \Omega))$

いま $f_u \in C^\infty(U)$ であり, $u(O\cap\Omega) \underset{\text{open}}{\subset} U$ より

$f_{u(O\cap\Omega)} = f_u|_{u(O\cap\Omega)} \in C^\infty(u(O\cap\Omega))$ $\square$

Proof of Thm 10.3.3 : (i) ⇒ (ii) は Prop 10.3.4 から従う.

(ii) ⇒ (i) を示す.

(ii) を仮定する. (i) を示そう.

示1 $f \in C(M)$

示2 $\forall (O, U, u) \in A$, $f_u \in C^\infty(U)$

示1 について: いま $\forall \lambda \in \Lambda$, $f|_{\Omega_\lambda} \in C^\infty(\Omega_\lambda ; A_{\Omega_\lambda}) \subset C(\Omega_\lambda)$

$\{\Omega_\lambda\}_\lambda$ は M の開被覆なので

演習問題71 より $f \in C(M)$.

示2 について：

$\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}$ を fix

示 $f_u \in C^\infty(U)$

Thm 8.2.4 より 以下を示せばよい

示 $\forall u \in U$, $\exists U_u$: u の open nbd in U s.t.

$f_u|_{U_u} \in C^\infty(U_u)$

$\forall u \in U$ を fix.

いま $\{O \cap \Omega_\lambda\}_\lambda$ は O の開被覆なので

$\{u(O \cap \Omega_\lambda)\}_\lambda$ は U の開被覆.

$u \in \mathfrak{u}(O \cap \Omega_\lambda)$ をとり λ を fix

$U_u := \mathfrak{u}(O \cap \Omega_\lambda)$ とおく.

このとき $\quad f_{\mathfrak{u}}\big|_{U_u} = f_{\mathfrak{u}|_{O \cap \Omega_\lambda}} \in C^\infty(\mathfrak{u}(O \cap \Omega_\lambda)) = C^\infty(U_u)$

∎

Section 10.4：ハウスドルフ性について

試験範囲外

Q C^∞-mfd の定義において

なぜ"M：ハウスドルフ"とした？

A：次の定理が欲しいから：

Thm 10.4.1 (M, A) : C^∞-n. mfd.

証明は試験範囲外

Section 10.5へ

$p \in \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$ とする.

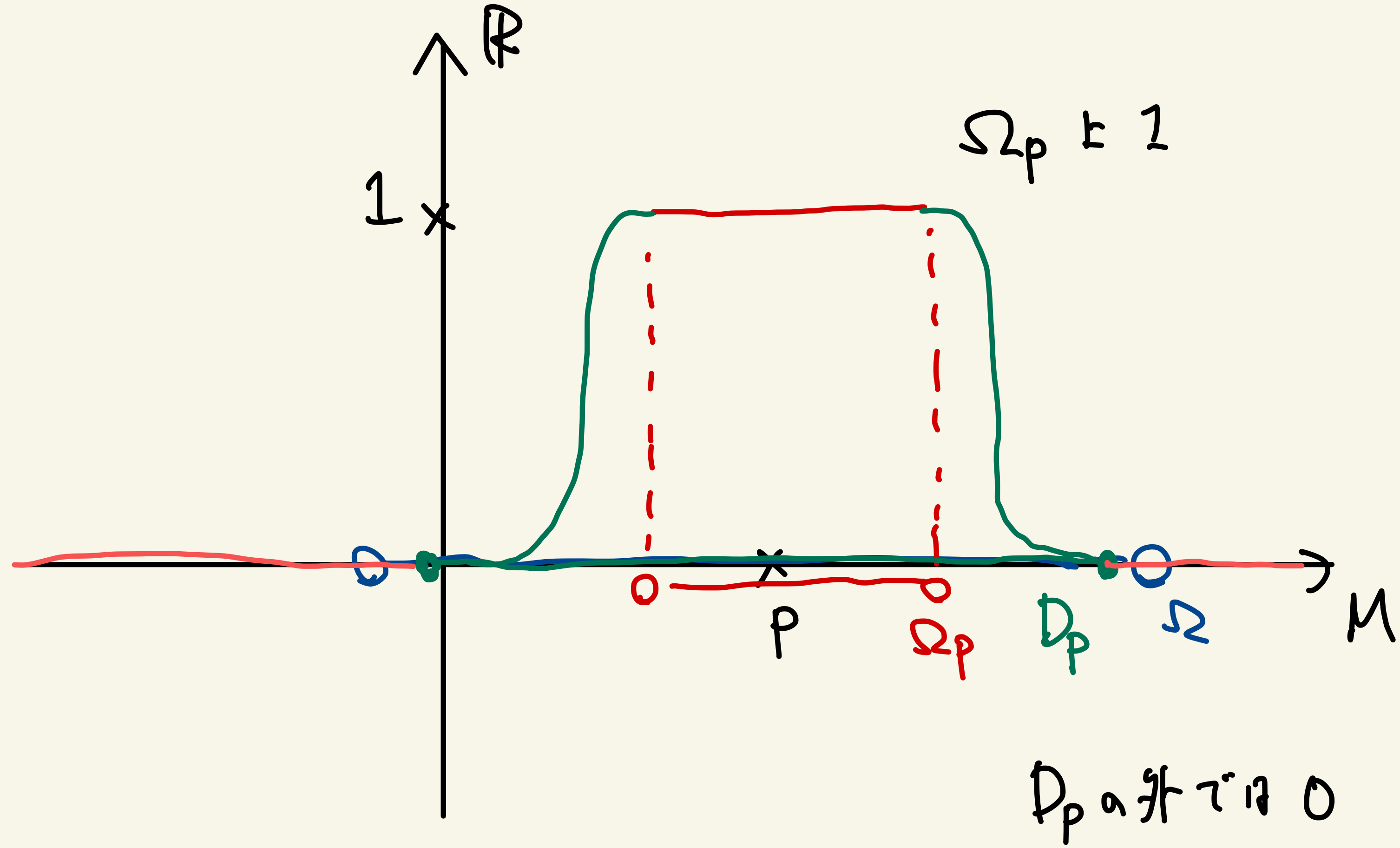
Thm 3.2.6 の部分的一般化

このとき

$\exists b \in C^\infty(M)$ s.t. $\begin{cases} p \in {}^\exists\Omega_p \underset{\text{open}}{\subset} \Omega \text{ s.t. } b(x) = 1 \ ({}^\forall x \in \Omega_p) \\ p \in {}^\exists D_p \underset{\text{closed}}{\subset} M \text{ s.t.} \\ \quad D_p \subset \Omega \text{ かつ} \\ \quad b(x) = 0 \ ({}^\forall x \in M \setminus D_p) \end{cases}$

cut-off 関数

イメージ



Thm 10.4.1 の系

Thm 10.4.2（C^∞級関数の延長定理）

$(M, \mathcal{A})$: C^∞-n. mfd.

$p \in \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$ とする.

このとき

$$p \in {}^\exists \Omega_p \underset{\text{open}}{\subset} \Omega \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^\forall h \in C^\infty(\Omega ; \mathcal{A}_\Omega) \\ {}^\exists \hat{h} \in C^\infty(M ; \mathcal{A}) \\ \quad \text{s.t.} \quad h|_{\Omega_p} = \hat{h}|_{\Omega_p} \end{array} \right.$$

気持ち
$h \in C^\infty(\Omega)$ について
p のまわりの様子を保ったまま
M 上の C^∞ 級関数に延長できる!

証明は試験範囲外
（Section 10.5へ）

Thm 10.4.1 の帰結として次も成り立つ：

Thm 10.4.3： M：ハウスドルフ位相空間

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ： 極大 n 次元 C^∞-atlas on M

について以下の二条件は同値

(i) $\mathcal{A} = \mathcal{B}$

$\Updownarrow$

(ii) $C^\infty(M; \mathcal{A}) = C^\infty(M; \mathcal{B})$

Section 10.5 : Thm 10.4.1, Thm 10.4.2 の証明

試験範囲外

Thm 10.4.1 (再掲) $(M, \mathcal{A})$: C^∞-n. mfd.

$p \in \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$ とする.

このとき

$\exists b \in C^\infty(M)$ s.t. $\begin{cases} p \in {}^\exists \Omega_p \underset{\text{open}}{\subset} \Omega \text{ s.t. } b(x) = 1 \ (\forall x \in \Omega_p) \\ p \in {}^\exists D_p \underset{\text{closed}}{\subset} M \text{ s.t. } \\ \quad D_p \subset \Omega \text{ かつ } \\ \quad b(x) = 0 \ (\forall x \in M \setminus D_p) \end{cases}$

Lemma 10.5.1

M : 位相空間

$\mathcal{A}$: 極大 n 次元 C^∞-atlas

$(O, U, u) \in \mathcal{A}$

$\Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$ とする.

このとき $(O \cap \Omega,\ u(O \cap \Omega),\ u|_{O \cap \Omega}) \in \mathcal{A}$

(Hint Prop 6.2.4, $[\mathcal{A}] = \mathcal{A}$ ($\because$ Thm 9.1.6))

Proof of Thm 10.4.1 :

Lemma 10.5.1 より $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ であって

$p \in O$ かつ $O \subset \Omega$ を満たすものが存在するのでとる.

$u(p) \in U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ なので

$U_r(u(p)) \subset U$ を満たす $r > 0$ が存在するのでとる.

$$U_r(u(p)) \overset{..}{=} \{ u \in \mathbb{R}^n \mid \|u - u(p)\| < r \}$$

Thm 3.2.6 より $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ であって

$$h(u) = 1 \quad \text{if} \quad \|u - u(p)\| \leq \frac{1}{3} r$$
$$h(u) = 0 \quad \text{if} \quad \|u - u(p)\| \geq \frac{2}{3} r$$

となるものがとれるのでとる。

ここで $b : M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} h(u(x)) & \text{if } x \in O \\ 0 & \text{if } x \notin O \end{cases}$ とおく。

また $p \in \Omega_p := u^{-1}(U_{1/3 r}(u(p))) \underset{\text{open}}{\subset} O \underset{\text{open}}{\subset} \Omega$ とおき,

$p \in D_p := u^{-1}(\{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u - u(p)\| \leq \frac{2}{3} r\}) \subset O \subset \Omega$

とおく。

いま $\{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u - u(p)\| \leq \frac{2}{3}r\}$ はコンパクト ($\because$ ハイネ-ボレル)

より D_p もコンパクト.

M はハウスドルフなので $D_p \underset{\text{closed}}{\subset} M$ ($\because$ Thm 10.1.2)

示1 $b \in C^\infty(M; A)$

示2 $b(x) = 1$ if $x \in \Omega_p$

示3 $b(x) = 0$ if $x \notin D_p$

示2 と 示3 は b の定義から明らか.

示 $b \in C^\infty(M, \mathcal{A})$

いま $O' := M \setminus D_p \underset{\text{open}}{\subset} M$ とおくと

$\{O, O'\}$ は M の開被覆 $(\because D_p \subset O)$

Thm 10.3.3 より 以下を示せば十分:

示イ $b|_O \in C^\infty(O; \mathcal{A}_O)$

示ロ $b|_{O'} \in C^\infty(O'; \mathcal{A}_{O'})$

示ロ は $b(x) = 0$ if $x \in O'$ から従う.

示 $b|_O \in C^\infty(O; A_O)$

$(O, U, u) \in A_O$ と Thm 8.2.3 より 以下を示せば十分

示 $(b|_O)_u \in C^\infty(U)$

b の定義より $(b|_O)_u = h|_U \in C^\infty(U)$ ∎

Thm 10.4.2 (C^∞級関数の延長定理：再掲)

$(M, \mathcal{A})$: C^∞-n-mfd.

$p \in \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$ とする.

このとき

$$p \in {}^\exists \Omega_p \underset{\text{open}}{\subset} \Omega \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^\forall h \in C^\infty(\Omega ; \mathcal{A}_\Omega) \\ \quad {}^\exists \tilde{h} \in C^\infty(M ; \mathcal{A}) \\ \qquad \text{s.t.} \quad h|_{\Omega_p} = \tilde{h}|_{\Omega_p} \end{array} \right.$$

Proof of Thm 10.4.2

Thm 10.4.1 の $b \in C^\infty(M;A)$, Ω_p, D_p を fix しておく.

示 $\forall h \in C^\infty(\Omega;A_\Omega)$, $\exists \tilde{h} \in C^\infty(M;A)$

s.t. $h|_{\Omega_p} = \tilde{h}|_{\Omega_p}$

$\forall h \in C^\infty(\Omega;A_\Omega)$ とおく.

$$\tilde{h} : M \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} b(x)\cdot h(x) & \text{if } x \in \Omega \\ 0 & \text{if } x \notin \Omega \end{cases}$$

このとき $h|_{\Omega_p} = \tilde{h}|_{\Omega_p}$ となることは定義から従う.

示 $\tilde{h} \in C^\infty(M; A)$

いま $\Omega' := M \setminus D_p$ とおくと

$\{\Omega, \Omega'\}$ は M の開被覆 $\left(\begin{array}{l} D_p \subset M : \text{closed} \\ \quad\text{かつ} \\ D_p \subset \Omega \end{array} \right)$

Thm 10.3.3 より 以下を示せばよい

示イ $\tilde{h}|_\Omega \in C^\infty(\Omega; A_\Omega)$

示ロ $\tilde{h}|_{\Omega'} \in C^\infty(\Omega'; A_{\Omega'})$

示ロ は $\tilde{h}(x) = 0$ if $x \in \Omega'$ より だめ.

示 $\tilde{h}|_\Omega \in C^\infty(\Omega; A_\Omega)$

定義より $\tilde{h}|_\Omega = \underbrace{(b|_\Omega)}_{\in\, C^\infty(\Omega; A_\Omega)} \cdot \overbrace{h}^{\in\, C^\infty(\Omega; A_\Omega)} \in C^\infty(\Omega; A_\Omega)$

($\because$ Prop 10.3.4)

□

MがハウスドルフでなH場合にはThm 10.4.1に反例がある:

Ex 10.5.2 (病的な非ハウスドルフな例)

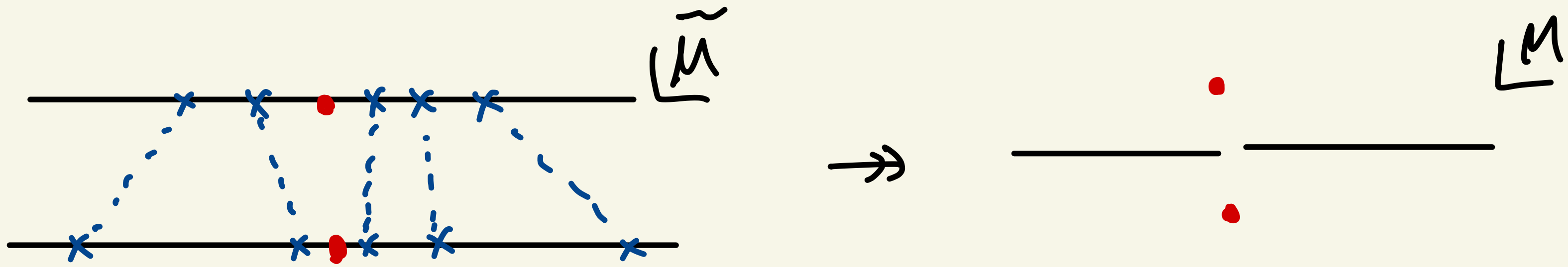
$\tilde{M} := \{(x,1) \mid x\in\mathbb{R}\} \sqcup \{(x,-1) \mid x\in\mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ とおく.

$\tilde{M}$ 上の同値関係 $\sim$ を以下で定める

$$(x,\varepsilon) \sim (y,\varepsilon') \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon=\varepsilon' \text{ かつ } x=y \\ \text{or} \\ (\varepsilon,\varepsilon') = (1,-1) \text{ かつ } x\neq 0 \text{ かつ } y=x^3 \\ \text{or} \\ (\varepsilon,\varepsilon') = (-1,1) \text{ かつ } y\neq 0 \text{ かつ } x=y^3 \end{cases}$$

商空間 $M = \tilde{M}/\sim$ について考える.

イメージ



注: M は非ハウスドルフ ($[(0,1)]$ と $[(0,-1)]$ は開近傍で分離できない)

$\mathcal{O} := M \setminus \{[(0,-1)]\}$

$U := \mathbb{R}$

$u : \mathcal{O} \to U,\ [(x,1)] \mapsto x$

$\mathcal{O}' := M \setminus \{[(0,1)]\}$

$V := \mathbb{R}$

$v : \mathcal{O}' \to V,\ [(x,-1)] \mapsto x$

とおくと $\mathcal{A}_0 := \{(\mathcal{O}, U, u), (\mathcal{O}', V, v)\}$ は 1次元 C^∞-atlas on M.

$[\mathcal{A}_0]$: $\mathcal{A}_0$ の定める極大1次元 C^∞-atlas on M とする.

このとき $(M, [\mathcal{A}_0])$ は Thm 10.4.1 の主張部分を満たさない

実際, $p := [(0,1)]$

$\Omega := \mathcal{O} = M \setminus \{[(0,-1)]\}$ とすると,

"$p \in D_p \underset{\text{closed}}{\subset} M$ かつ $D_p \subset \Omega$" となる D_p は存在しない.

$\left(\because\ 1\text{点集合 } \{p\} \text{ の閉包 in } M \text{ が } \{p, [(0,-1)]\} \not\subset \Omega \right)$

この例では Thm 10.4.2 も成立していない (詳細略)

Section 10.6 : Thm 10.4.3 の証明

試験範囲外

Thm 10.4.3（再掲）: M : ハウスドルフ位相空間

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$: 極大 n 次元 C^∞-atlas on M

について次下の二条件は同値

(i) $\mathcal{A} = \mathcal{B}$

$\Updownarrow$

(ii) $C^\infty(M; \mathcal{A}) = C^\infty(M; \mathcal{B})$

Thm 10.4.3 の証明の準備：

Prop 10.6.1 ： $(M, \mathcal{A})$: C^∞-n-mfd.

$(O, U, u) \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \Psi : C^\infty(O; \mathcal{A}_O) &\to C^\infty(U) \quad \text{は } \mathbb{R}\text{代数同型} \\ f &\mapsto f_u \end{aligned}$$

Hint ： $(O, U, u) \in \mathcal{A}_O$ より Ψ は well-defined.

定義より 単射.

Thm 8.3.3 より 全射

$\mathbb{R}$-alg hom であることは easy

Thm 10.4.2 と Prop 10.6.1 から次が言える.

Cor 10.6.2 : $(M, \mathcal{A})$: C^∞-n-mfd

$(O, U, u) \in \mathcal{A}$ とする.

$\forall u \in U$, $u \in {}^{\exists} U_u \underset{\text{open}}{\subset} U$ s.t.

$\forall h \in C^\infty(U)$, $\exists \tilde{h} \in C^\infty(M; \mathcal{A})$

s.t. $\tilde{h}_u|_{U_u} = h|_{U_u}$

Proof of Thm 10.4.3

(i) ⇒ (ii) は定義より明らか.

(ii) ⇒ (i) を示す.

(ii) を仮定する. (i) を示す.

$\mathcal{A} \subset \mathbb{B}$ を示そう.

$\mathbb{B}$ は極大なので $[\mathbb{B}] = \mathbb{B}$ に注意.

示 $\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}$, $(O, U, u) \in [\mathbb{B}]$

$\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}$ をとる.

(示) $(O, U, u) \in [\mathcal{B}]$

i.e. $\forall (O', V, v) \in \mathcal{B}$,

τ_{uv}, τ_{vu} : C^∞級写像

$\forall (O', V, v) \in \mathcal{B}$ をとる.

(示) τ_{uv}, τ_{vu} : C^∞級写像.

示1 $\tau_{uv} : u(O\cap O') \to v(O\cap O')$ が C^∞ 級

示2 τ_{vu} 〜

示1 について：$\forall h \in C^\infty(v(O\cap O'))$ をとる.

示 $\tau_{uv}^*(h) \in C^\infty(u(O\cap O'))$

Thm 8.2.4 より 次を示せばすむ

示 $\forall u \in u(O\cap O')$, $u \in U_u \underset{\text{open}}{\subset} u(O\cap O')$

$$\tau_{uv}^*(h)\big|_{U_u} \in C^\infty(U_u)$$

$\forall u \in u(O \cap O') \underset{\text{open}}{\subset} U$ をとる.

$v := \tau_{uv}(u) \in v(O \cap O') \underset{\text{open}}{\subset} V$ とおく.

いま $(O \cap O',\ v(O \cap O'),\ v|_{O \cap O'}) \in \mathcal{B}$

($\because$ Lem 10.5.1)

に注意して Cor 10.6.2 を用いると

$v \in V_v \underset{\text{open}}{\subset} v(O \cap O')$, $\tilde{h} \in C^\infty(M; \mathcal{B})$ であって

$h|_{V_v} = \tilde{h}_{v|_{O \cap O'}}|_{V_v}$ となるものがとれるので

とる.

$u \in U_u := \tau_{uv}^{-1}(V_v) \underset{\text{open}}{\subset} u(O \cap O')$ とおく.

㊟ $\tau_{uv}^{*}(h)|_{U_u} \in C^\infty(U_u)$.

(ii) の仮定より

$\tilde{h} \in C^\infty(M; \mathcal{B}) = C^\infty(M; \mathcal{A})$.

特に $(O \cap O', u(O \cap O'), u|_{O \cap O'}) \in \mathcal{A}$ より

(Lem 10.5.1)

$\tilde{h}_{u|_{O\cap O'}} \in C^\infty(u(O \cap O'))$ であり,

$$\tilde{h}_{u|_{O\cap O'}}\Big|_{U_u} \in C^\infty(U_u)$$ を得る.

定義より $\tau_{uv}^*(h)\big|_{U_u} = \tilde{h}_{u|_{O\cap O'}}\big|_{U_u}$ となので

$\forall u' \in U_u$ について

$$\tau_{uv}^*(h)(u') = h(\underbrace{\tau_{uv}(u')}_{\in V_v})$$

$$= \left(\tilde{h}_{v|_{O\cap O'}}\right)(\tau_{uv}(u'))$$

$$= \tilde{h}(v^{-1}(\tau_{uv}(u')))$$

$$= \tilde{h}(u^{-1}(u')) = \tilde{h}_{u|_{O\cap O'}}(u')$$

$\tau_{uu}^*(h)|_{U_u} \in C^\infty(U_u)$

これで

示1 $\tau_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$ が C^∞級

が示された.

示2 τ_{uu} の C^∞性も同様に示せる.

$\hookrightarrow$ $A \subset B$ が示される.

$B \subset A$ も同様. 図