

Section 12 : 射影空間

射影空間の C^∞ 級行列体 r 及び $\varepsilon \in \mathbb{R}$ を紹介する。

Part II : 可微分行列体 の 定義

Section 6 局所座標系

Section 7 座標変換と C^∞ -atlas

Section 8 C^∞ 級関数 on C^∞ -atlas

Section 9 極大 C^∞ -atlas

Section 10 C^∞ 級行列体

Section ~~11~~ 射影空間

12

< Section 11 : 連続行列体

Section 12.1 : 射影空間とその位相

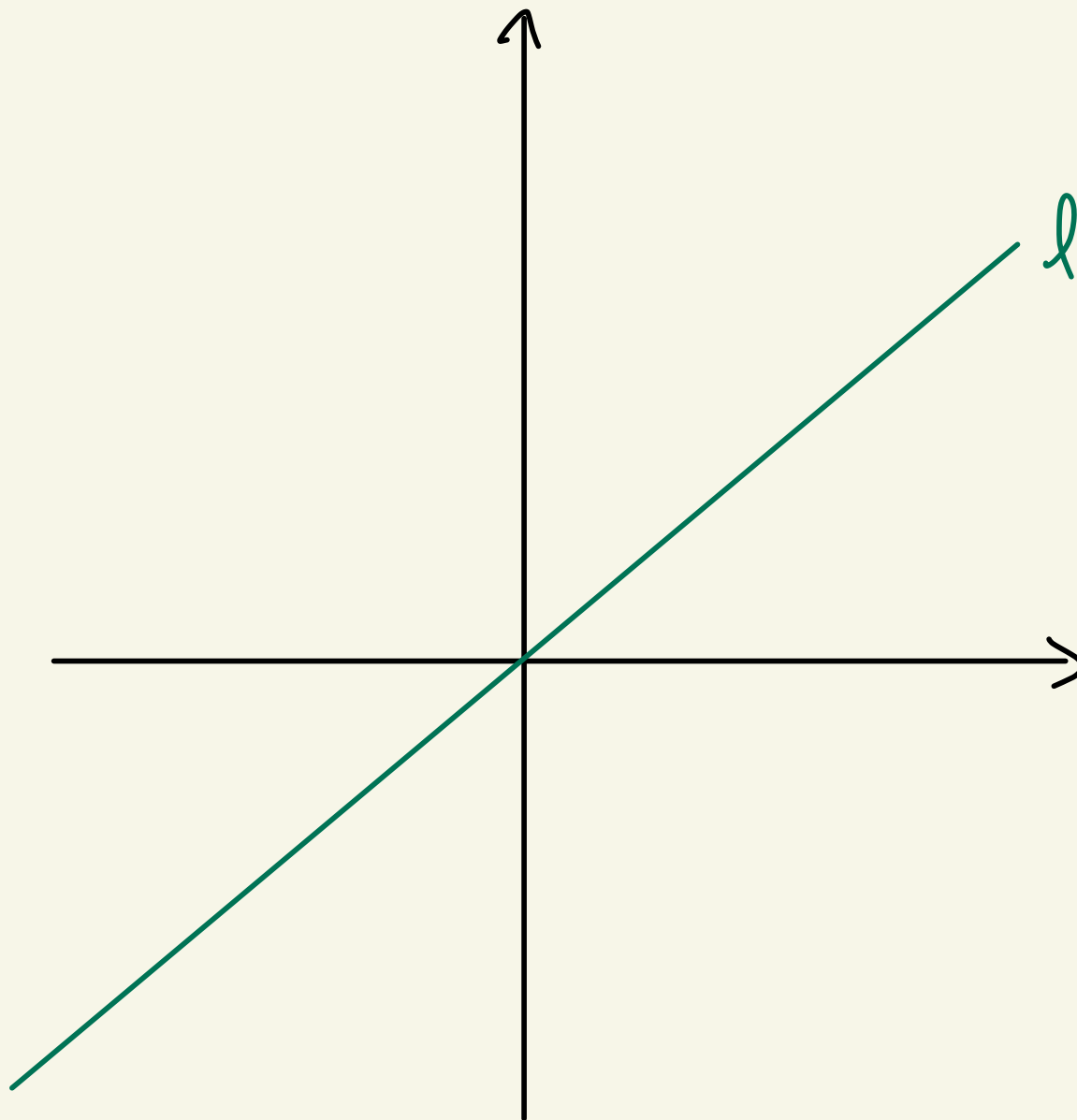
設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Def 12.1.1 :

$\mathbb{R}P^n := \{ l \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid l \text{ は } \mathbb{R}^{n+1} \text{ の 1 次元線型部分空間} \}$
と置く.

射影空間

$$1x - 3j$$
$$(n=1)$$



① $\mathbb{R}P^n$ は位相として定められる。

$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ は \mathbb{R}^{n+1} の部分空間 (位相は相対位相) とみられる。

Prop 12.1.2: $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$

$$x \mapsto \mathbb{R}x := \{rx \mid r \in \mathbb{R}, r \neq 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

は写像として well-defined かつ 全射

Def 12.1.3: $\mathbb{R}P^n$ は $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の商空間 (商位相として定められる) とみられる。

(位相空間) とみられる。

(i.e. $O \subset \mathbb{R}P^n$ が open $\stackrel{\text{def}}{\iff} \pi^{-1}(O) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ が open)

Prop 12.1.4 : $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$: 線型部分空間 $\varepsilon \bar{W}$.

ざざざ

$$O_W := \{ l \in \mathbb{R}P^n \mid l \notin W \} \subset \mathbb{R}P^n$$

open

Proof : $\textcircled{\bar{A}}$ $\pi^{-1}(O_W) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$\pi^{-1}(O_W) := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mid \mathbb{R}x \notin W \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mid x \notin W \}$$

$$= \mathbb{R}^{n+1} \setminus W \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

open

$W \subset \mathbb{R}^{n+1}$: 線型部分空間 $\varepsilon \bar{W}$ is closed

Thm 12.1.5 : $\mathbb{R}P^n$ は $n=1071$ ハウスドルフ位相空間.

この命題は 付明 でいい.

← ハウスドルフ性は高次元
に連続可子と制限される

Hint とした命題を Section 12.3 にいって参考しておく.

(試験範囲外)

Section 12.2 : 射影空間 上 a C^∞ -atlas

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

① $\mathbb{R}P^n$ is C^∞ -atlas is defined by:

記号 : $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$

$$x \longmapsto [x] = [x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}]$$

ii
 $\mathbb{R}x$

Remark : $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ (i.e. $x \neq 0$)

$$[x_1 : \cdots : x_{n+1}] = [y_1 : \cdots : y_{n+1}]$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ s.t. } x = \lambda y.$$

Thm (2.2.1) : $\forall i = 1, \dots, n+1$ $W_i := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ & (,

$$O_i := O_{W_i} \subset_{\text{open}} \mathbb{R}P^n$$

$$U_i := \mathbb{R}^n$$

$$u_i : O_i \rightarrow U_i, [x] \mapsto \frac{1}{x_i} (x_1, \dots, \overset{x_i}{\downarrow}, \dots, x_{n+1})$$

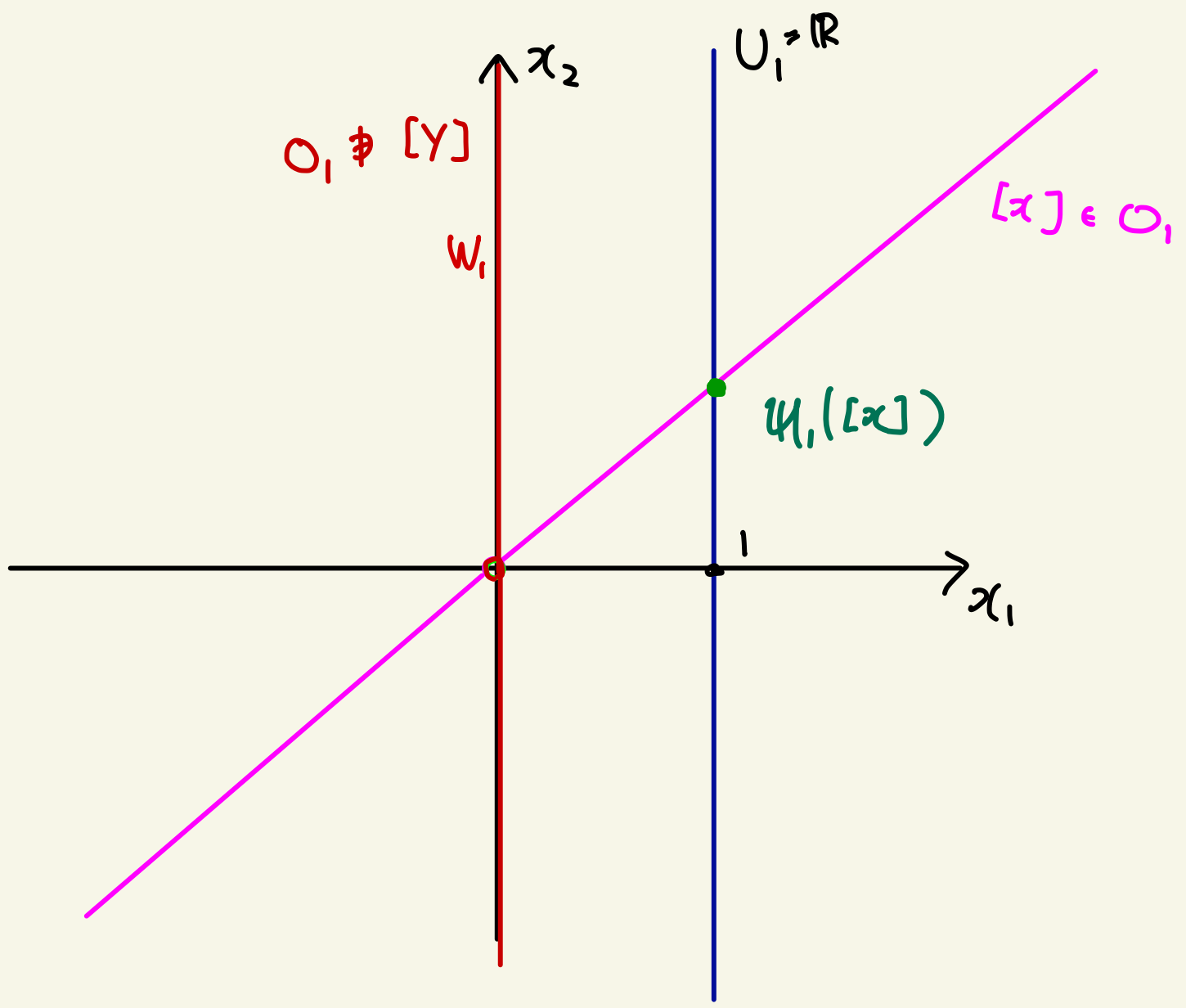
$$\frac{1}{x_i} (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$$

$$(x \in \pi^{-1}(O_i))$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n+1\} \quad (O_i, U_i, u_i) \in \mathcal{LC}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{R}^n)$$

(Hint: $(u_i)^{-1} : U_i \rightarrow O_i, u = (u_1, \dots, u_n) \mapsto [u_1 : \dots : u_{i-1} : 1 : u_i : \dots : u_n]$)
well-defined (注意)

$n=1$ の場合の x -ジ



Thm 12.2.2 :

$$A_0 := \{ (O_i, U_i, \psi_i) \mid i = 1, \dots, n+1 \}$$
$$\in C^\infty\text{-atlas}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{R}^n)$$

問 12 $(\mathbb{R}P^n; [A_0])$ は C^∞ - n -mfd.

Proof

$\mathbb{R}P^n$ のハウスドルフ性については Thm 12.1.5.

A_0 は C^∞ -atlas であることを見せる。

① $\bigcup_{i=1}^{n+1} O_i \supset \mathbb{R}P^n$

② A_0 内の座標変換は C^∞ 級写像

$$\textcircled{1} \iff \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} O_i \supset \mathbb{R}P^n \right)$$

$$\forall l \in \mathbb{R}P^n \exists \varepsilon \delta.$$

$$\textcircled{\text{ii.}} \exists i = 1, \dots, n+1, l \in O_i$$

$$[x] = l \iff \exists \delta > 0 \text{ such that } x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \text{ with } |x_i| > \delta \text{ for some } i \text{ (Prop 12.1.2)}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{ii} \\ \bar{\alpha}(x) \end{array} \right)$$

$$x = 0 \text{ is not possible } \implies x_i \neq 0 \text{ for some } i = 1, \dots, n+1 \text{ with } |x_i| > \delta.$$

$$\textcircled{\text{iii.}} l \in O_i := W_i \iff \text{i.e. } l \notin W_i := \{ \gamma \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \gamma_i = 0 \}$$

$$\text{if } x_i \neq 0 \text{ then } x \notin W_i.$$

$$\text{Therefore } l \notin W_i.$$

$$\begin{array}{c} \subset \\ x \end{array}$$

$\textcircled{1}$ 証明 終

② について

$1 \leq i \neq j \leq n+1$ と可.

$(O_i, U_i, \mathcal{U}_i)$ から $(O_j, U_j, \mathcal{U}_j)$ への座標変換は簡単のため

$$\tau_{ij} : \mathcal{U}_i(O_i \cap O_j) \rightarrow \mathcal{U}_j(O_i \cap O_j) \quad \text{と可.}$$

$$\left\{ u \in \mathbb{R}^n \mid u_{j-1} \neq 0 \right\} \quad \left\{ v \in \mathbb{R}^n \mid v_i \neq 0 \right\}$$

\hookrightarrow

\hookrightarrow

$$u \xrightarrow{\tau_{ij}} \frac{1}{u_{j-1}} (u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_i, \dots, u_{j-2}, u_j, \dots, u_n)$$

τ_{ij} は C^∞ 級

(ほぼ同様に τ_{ji} も C^∞ -級)

② 証明終

□

C^∞ 級関数 a の例として \mathbb{R}^n を

$$\text{i.e. } \forall r \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ f_i(rx) = r^k f_i(x)$$

Thm 12.2.3: $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と \forall .

$f_1, f_2: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ は k 次 C^∞ 級関数と l ,

f_2 は $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上 零点を有しない \forall と \forall .

このとき

$$f: \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad l = [x] \mapsto \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

is well-defined (well-defined)

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}P^n; [A_0]).$$

Ex 12.2.4 :

$$f: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R}, [x_1: x_2: x_3] \mapsto \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

奇二次

↓

is well-defined?

$f \in C^\infty(\mathbb{RP}^2; \mathbb{R})$

Proof of Thm (2.2.3):

if f is a well-defined f.d.f. \Rightarrow is it?

$\forall x, y \in \mathbb{R}^{n \times 1} \setminus \{0\}$ with $[x] = [y] \Rightarrow \exists d$.

$$\textcircled{1} \quad \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(y)}{f_2(y)} \quad (\in \mathbb{R})$$

$[x] = [y]$ iff $\lambda \in \mathbb{R}^x$ s.t. $x = \lambda y$ \Rightarrow $f_1(x) = \lambda^k f_1(y)$ and $f_2(x) = \lambda^k f_2(y)$.

$\therefore f_1, f_2$ is homogeneous of degree k .

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(\lambda y)}{f_2(\lambda y)} = \frac{\lambda^k f_1(y)}{\lambda^k f_2(y)} = \frac{f_1(y)}{f_2(y)}$$

\therefore is a well-defined f.d.f. \Rightarrow is it?

示 $f \in C^\infty(\mathbb{R}P^n; [A_0])$ を示す。

Thm 8.2.3 示) 以下を示す。1/2

(示) $i=1, \dots, n+1$, $f_{u_i} \in C^\infty(U_i)$

$\forall i=1, \dots, n+1$ $\varepsilon > 0$.

(示) $f_{u_i} \in C^\infty(U_i)$

$$f_{u_i} : U_i \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ccc} \subset & & \cup \\ \mathbb{R}^n & & \cup \end{array}$$

$$u \mapsto f(u_i^{-1}(u)) = f([u_1 \cdots u_{i-1} : 1 : u_i : \cdots : u_n])$$

$$= \frac{f_1(u_1 \cdots u_{i-1}, 1, u_i, \dots, u_n)}{f_2(u_1 \cdots u_{i-1}, 1, u_i, \dots, u_n)}$$

これは C^∞ 級 (詳細略)

Section 12.3: Prop 12.1.5 について

試験範囲外

Thm 12.1.5 (再掲): $\mathbb{R}P^n$ は コンパクト の位相空間.

Hint と同じ命題を \mathbb{R}^n の場合を参考にしてください.

\mathbb{R}^n の場合について \mathbb{R}^n の Hint

Prop 12.3.1: $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$
(コンパクト)

$\pi(S^n) = \mathbb{R}P^n$

ハウスドルフ性 に関する Hint :

Prop 12.3.2 X は位相空間, Y は集合, $\pi: X \rightarrow Y$ は全射 \hookrightarrow ,

Y は商位相 ε を持つ.

すなわち $\pi: X \rightarrow Y$ は開写像 \hookrightarrow である.

このとき 次の 2 条件は同値

(i) Y はハウスドルフ

(ii) $\{ (x_1, x_2) \in X \times X \mid \pi(x_1) = \pi(x_2) \}$

は $X \times X$ の 閉集合

商位相

Lem 12.3.3 : $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ は閉写像

Lem 12.3.4 $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ について

$\{ (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \mid$

$$\pi(x_1) = \pi(x_2) \}$$

は $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$

の閉集合.