Section 13 : 接空間

C^∞-mfd の各点において接空間を定義する.

Part III : 多様体上の微分論

- Section 13 : 接空間
- Section 14 : C^∞級写像
- Section 15 : 写像の微分
- Section 16 : 正則部分多様体
- Section 17 : ベクトル場とその flow (試験範囲外)

Section 13.1：接空間の定義

設定：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M = (M, \underset{\sim}{\mathcal{A}})$ ： C^∞-n-mfd

以降省略することが多い

$p \in M$

記号：

$C^\infty(M) = C^\infty(M, \underset{\sim}{\mathcal{A}}) := \{ f \in C(M) \mid f$ は $\mathcal{A}$ 上 C^∞ 級$\}$

以降省略することが多い。

$\mathbb{R}$ 代数 ($\because$ Thm 8.3.2)

Def 13.1.1

$$T_pM := \left\{ \delta : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \delta \text{ は線型,} \\ \delta(f \cdot g) = \delta(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \delta(g) \\ \qquad\qquad \forall f, g \in C^\infty(M) \end{array} \right\}$$

M の p における接空間

δ は p におけるライプニッツ則を満たす

T_pM の元を "M の p における接ベクトル" という.

Prop 13.1.2 : T_pM は $L(C^\infty(M), \mathbb{R})$ の線型部分空間.

Section 13.2：座標基底

設定：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M = (M, \mathcal{A})$：C^∞-n-mfd

$p \in M$

$(O, U, u) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$

$\left(f_u \in C^\infty(U) \right)$

Def 13.2.1：各 $i=1,\cdots,n$ について

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\quad f \mapsto \frac{\partial f_u}{\partial u_i}(u(p))$$

$$:= \lim_{h\to 0} \frac{f_u(u(p)+he_i) - f_u(u(p))}{h}$$

とおく。

$(e_1,\cdots e_n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底$)$

記号の乱用

地図 (O,U,u) 上で第 i 偏微分

Prop 13.2.2：$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_pM \quad (i=1,\cdots,n)$

Thm 13.2.3：$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\}_{i=1,\cdots,n}$ は T_pM の基底。

証明は試験範囲外 (Section 13.4)

T_pM の (O,U,u) についての座標基底

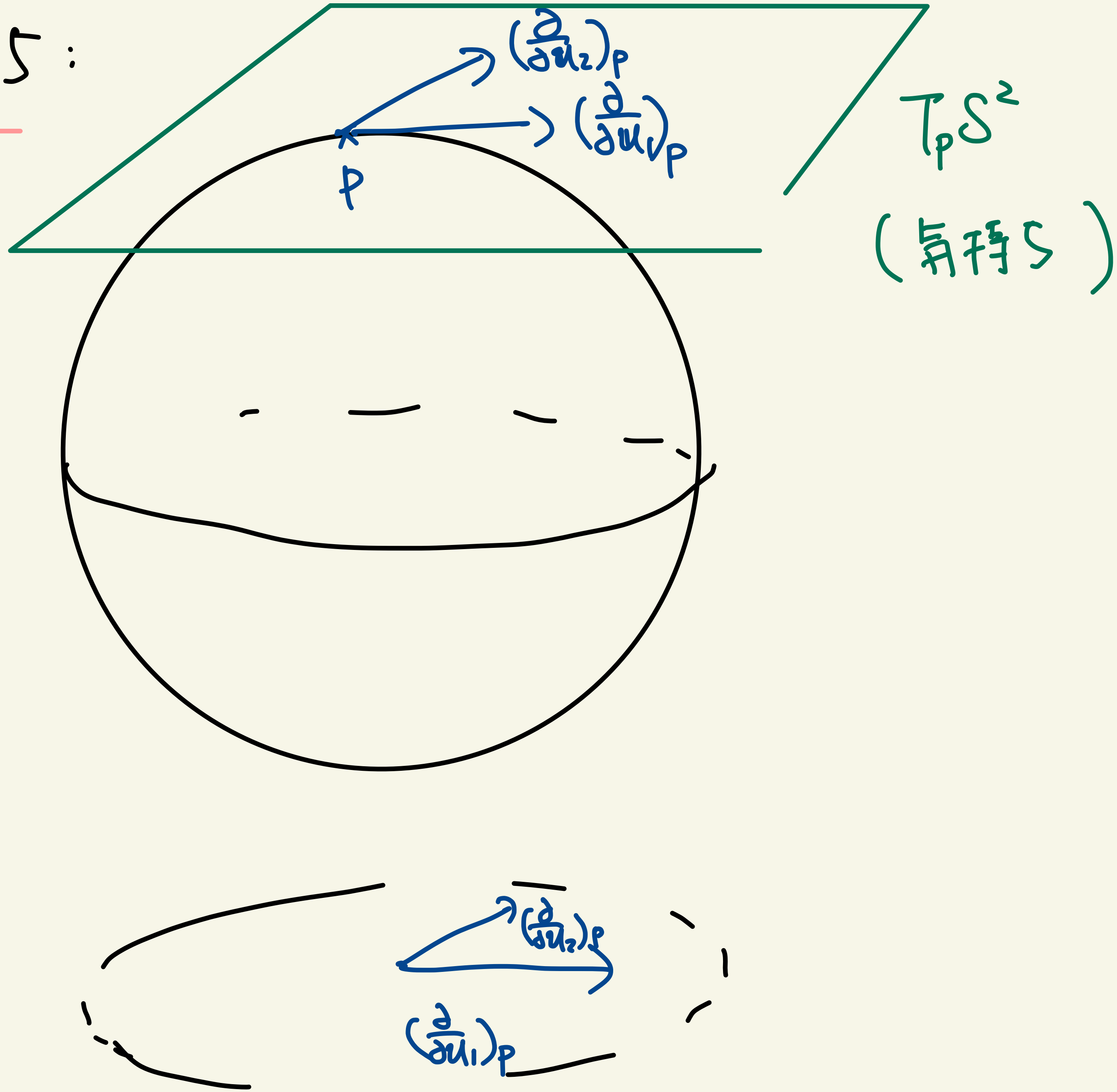
← 使用用語

証明スライド

Cor 13.2.4 : $\dim T_pM = n$

← M が次元

Ex 13.2.5:



$\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right)_p$
$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p$
p
T_pS^2
(与拜5)
$\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right)_p$
$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p$

Section 13.3 : 座標基底の基底変換

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M = (M, \mathcal{A})$: C^∞-n-mfd

$p \in M$

(O, U, u)
(O', V, v) $\in \mathcal{A}$ with $p \in O \cap O'$

Recall : $T_{uv} : \underset{\substack{\cup \\ u(p)}}{u(O \cap O')} \to v(O \cap O')$: C^∞級

$u(O \cap O') \subset_{\text{open}} \mathbb{R}^n$, $v(O \cap O') \subset_{\text{open}} \mathbb{R}^n$

Thm 13.3.1：（証明は試験範囲外：Section 13.7へ）

Jacobi行列 $(J\tau_{uv})_{u(p)} := \left(\dfrac{\partial (\tau_{uv})_i}{\partial u_j}(u(p)) \right)_{i,j=1,\cdots,n} \in M(n;\mathbb{R})$

は T_pM の基底

$\left\{ \left(\dfrac{\partial}{\partial v_i}\right)_p \right\}_{i=1,\cdots,n}$ から $\left\{ \left(\dfrac{\partial}{\partial u_j}\right)_p \right\}_{j=1,\cdots,n}$ への変換行列

i.e. $y \in T_pM$ が $y = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\dfrac{\partial}{\partial u_i}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\dfrac{\partial}{\partial v_i}\right)_p$ $(a_i, b_i \in \mathbb{R})$

と書いたとき

$$(J\tau_{uv})_{u(p)} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rr, "{\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial u_n}\right)_p\right)}"] \arrow[d, "(J\tau_{uv})_{u(p)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & & T_pM \\
\mathbb{R}^n \arrow[urr, "{\left(\left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial v_n}\right)_p\right)}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Ex 13.3.2： C^∞-2・mfd $S^2 = (S^2, [\mathcal{A}_0])$ (Ex 10.2.4) について

$p = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \in S^2$ とし

$(O, U, u) = (O_1^+, U_1^+, u_1^+)$

$(O', V, v) = (O_2^+, U_2^+, u_2^+)$ $\in \mathcal{A}_0$ (Ex 7.3.2) を考えると

$p \in O \cap O'$.

T_pS^2 の基底として

$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p \right\}_{i=1,2}$ と $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_p \right\}_{i=1,2}$ がとれる.

$$T_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$$

$$u(O \cap O') = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| < 1,\ u_1 > 0\}, \qquad v(O \cap O') = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\| < 1,\ v_1 > 0\}$$

$$u \longmapsto \left(\sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2},\ u_2\right)$$

に注意すると

$$u(p) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1) \in u(O \cap O')$$

$$(J T_{uv})_{u(p)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q　$v = 2\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right)_p \in T_pM$ を

$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_p\right\}_{i=1,2}$ の1次結合で書くと？

A　$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるので　Thm 13.3.1 より

$$v = -3\left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial v_2}\right)_p$$

Section 13.4：接ベクトルの局所性　試験範囲外

設定：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M = (M, \mathcal{A})$：C^∞-n-mfd

$p \in M$

Thm 13.4.1

$v \in T_pM$ とし，$f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ を

“$p \in {}^\exists \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$ s.t. $f_1|_\Omega = f_2|_\Omega$” となるものとする.

（pのまわりで等しい）

このとき $v(f_1) = v(f_2)$

Proof of Thm 13.4.1 :

$g := f_1 - f_2 \in C^\infty(M)$ とおく.

示 $\eta(g) = 0$

$p \in \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$ で $g|_\Omega \equiv 0$ となるものがとれるのでとる.
(∵ f_1, f_2 の設定より)

$h : \Omega \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$ とすると $h \in C^\infty(\Omega)$.

Thm 10.4.1 より $b \in C^\infty(M)$, $p \in \Omega_p \underset{\text{open}}{\subset} \Omega$, $p \in D_p \underset{\text{closed}}{\subset} M$ であって

$$\begin{cases} b(x) = 1 & \text{if } x \in \Omega_p \\ D_p \subset \Omega \text{ かつ } b(x) = 0 & \text{if } x \notin D_p \end{cases}$$

となるものがとれるのでとる.

$\psi : M \to \mathbb{R},\quad x \mapsto 1 - b(x) \in C^\infty(M)$ とおく.

$\psi(p) = 0$ と $\psi(x) = 1$ if $x \notin \Omega$ に注意

特に $g \cdot \psi = g$ on M.

$x \in \Omega$ のとき

$(g \cdot \psi)(x) = \underbrace{g(x)}_{=0} \cdot \psi(x) = 0$

$= g(x)$

$x \notin \Omega$ のとき

$(g \cdot \psi)(x) = g(x) \cdot \underbrace{\psi(x)}_{=1} = g(x)$

従って $\mathcal{J}(g) = \mathcal{J}(g \cdot \psi)$

$= \mathcal{J}(g) \cdot \underbrace{\psi(p)}_{=0} + \underbrace{g(p)}_{=0} \cdot \mathcal{J}(\psi) = 0$ ∎

Section 13.5 : 開部分多様体の接空間

設定 : $M = (M; \mathcal{A})$: C^∞-n-mfd.

$p \in \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$

open submfd とみなす.

ゴール :

$T_p\Omega$ と T_pM が"同じ"であることを示す.

(Thm 13.5.4)

Prop 13.5.1 : $r : C^\infty(M) \to C^\infty(\Omega)$ は $\mathbb{R}$-alg hom.

$$f \mapsto f|_\Omega$$

Def 13.5.2 : 各 $y \in T_p\Omega$ について

$\tilde{y} : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto y(f|_\Omega)$ とする.

Prop 13.5.3 : $\tilde{y} \in T_pM$ for any $y \in T_p\Omega$

Thm 13.5.4 : $T_p\Omega \to T_pM$, $\eta \mapsto \tilde{\eta}$ は線型同型.

線型性は easy

単射性と全射性をそれぞれ示す.

単射性: ${}^\forall \eta \in T_p\Omega$ with $\tilde{\eta} = 0$ in T_pM を fix

示) $\eta = 0$ in $T_p\Omega$

${}^\forall f \in C^\infty(\Omega)$ を fix

示) $\eta(f) = 0$

Thm 10.4.2 より $p \in \Omega_p \underset{\text{open}}{\subset} \Omega$, $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ であって

$f|_{\Omega_p} = \tilde{f}|_{\Omega_p}$ となるものがとれるのである.

いま $\tilde{\eta} = 0$ なので $\tilde{\eta}(\tilde{f}) = \eta(\tilde{f}|_{\Omega}) = 0$

ここで Thm 13.4.1 より $0 = \eta(\tilde{f}|_{\Omega}) = \eta(f)$

∎

全射性: $^\forall \xi \in T_pM$ を fix

示 $^\exists y \in T_p\Omega$ s.t. $\tilde{y} = \xi$.

$$y : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{R},\quad h \mapsto \xi(\tilde{h})$$ とおく.

ただし各 $h \in C^\infty(\Omega)$ に対して $\tilde{h} \in C^\infty(M)$ は

$p \in {}^\exists\Omega_p \underset{\text{open}}{\subset} \Omega$ s.t. $h|_{\Omega_p} = \tilde{h}|_{\Omega_p}$

$*_h$ を満たすものとする.

(Thm 10.4.2 より存在する)

y は well-defined (∵ Thm 13.4.1 より)

示 $\mathfrak{y} \in T_p\Omega$ かつ $\tilde{\mathfrak{y}} = \xi$

まず $\mathfrak{y}$ の線型性を示そう

$h, h_1, h_2 \in C^\infty(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ を fix

示 $\mathfrak{y}(h_1+h_2) = \mathfrak{y}(h_1) + \mathfrak{y}(h_2)$ かつ $\mathfrak{y}(\lambda h) = \lambda \mathfrak{y}(h)$

$\tilde{h}, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in C^\infty(M)$ であって $\tilde{h}$, $\tilde{h}_1$, $\tilde{h}_2$ は $☆_h$, $☆_{h_1}$, $☆_{h_2}$ を満たすものをとる。

このとき $\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 \in C^\infty(M)$ は $☆_{h_1+h_2}$ を満たすので

$$\mathfrak{y}(h_1+h_2) = \xi(\tilde{h}_1+\tilde{h}_2) = \xi(\tilde{h}_1) + \xi(\tilde{h}_2) = \mathfrak{y}(h_1)+\mathfrak{y}(h_2)$$

また $\lambda\tilde{h}$ は $☆_{\lambda h}$ を満たすので

$$\mathfrak{y}(\lambda h) = \xi(\lambda\tilde{h}) = \lambda\xi(\tilde{h}) = \lambda\mathfrak{y}(h)$$

次に g が p においてライプニッツ則を満たすことを示そう.

$h_1, h_2 \in C^\infty(\Omega)$ を fix

示 $g(h_1 \cdot h_2) = g(h_1) \cdot h_2(p) + h_1(p) \cdot g(h_2)$

$\tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in C^\infty(M)$ で $\tilde{h}_1$ は $\star_{h_1}$ を満たすものをとる.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \tilde{h}_2$ $\qquad \star_{h_2}$

このとき $\tilde{h}_1 \cdot \tilde{h}_2$ は $\star_{h_1 h_2}$ を満たすので

$$
\begin{aligned}
g(h_1 \cdot h_2) &= \xi(\tilde{h}_1 \cdot \tilde{h}_2) \\
&= \xi(\tilde{h}_1) \cdot \tilde{h}_2(p) + \tilde{h}_1(p) \cdot \xi(\tilde{h}_2) \\
&= g(h_1) \cdot h_2(p) + h_1(p) \cdot g(h_2)
\end{aligned}
$$

最後に $\tilde{j} = \xi$ を示す

$\forall f \in C^\infty(M)$ をとる.

㊞ $\tilde{j}(f) = \xi(f)$

f は $\ast_{f|_\Omega}$ を満たすので

$$\tilde{j}(f) = j(f|_\Omega) = \xi(f).$$

$\boxtimes$

Section 13.6 : Thm 13.2.3 の証明

Thm 13.2.3 (再掲) : $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right\}_{i=1,\cdots,n}$ は T_pM の基底.

Proof of Thm 13.2.3 :

Thm 13.5.4 より $T_pM \cong T_pO$ (as $\mathbb{R}$-vector spaces)

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p : C^\infty(O) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \frac{\partial f_u}{\partial x_i}(p) \right\}_{i=1,\cdots,n}$$

が T_pO の基底であることを示せばよい.

Prop 10.6.1 より $\quad C^\infty(O) \to C^\infty(U)$ は $\mathbb{R}$ 代数同型

$$f \mapsto f_u$$

更に

$$ev_p : C^\infty(O;A_0) \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(p)$$

$$ev_{u(p)} : C^\infty(U) \to \mathbb{R},\ g \mapsto g(u(p))$$

について

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(O;A_0) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "ev_p"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & C^\infty(U) \arrow[dl, "ev_{u(p)}"] \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

これより ← Section 4 の意味

$$
\begin{aligned}
T_{x(p)}U &\to T_pO \\
j &\mapsto \hat{j} : C^\infty(O) \to \mathbb{R} \\
& \qquad\qquad f \mapsto j(f_x)
\end{aligned}
$$

は線型同型

(詳細略)

いま $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_{x(p)}\right\}_{i=1,\cdots,n}$ は $T_{x(p)}U$ の基底 (Cor 4.3.6)

より $\left\{\widehat{\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_{x(p)}} = \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p\right\}_{i=1,\cdots,n}$ は $T_{x(p)}O$ の基底

∎

Section 13.7 : Thm 13.3.1 の証明

設定 :

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M = (M, \mathcal{A})$: C^∞-n-mfd

$p \in M$

(O, U, u), $(O', V, v) \in \mathcal{A}$ with $p \in O \cap O'$

Thm 13.3.1：（再掲）

Jacobi 行列 $\displaystyle (J\tau_{uv})_{u(p)} := \left(\frac{\partial (\tau_{uv})_i}{\partial u_j}(u(p)) \right)_{i,j=1,\cdots,n} \in M(n;\mathbb{R})$

は T_pM の基底

$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_p \right\}_{i=1,\cdots,n}$ から $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p \right\}_{j=1,\cdots,n}$ への変換行列

i.e. $y \in T_pM$ が $\displaystyle y = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_p$ $(a_i, b_i \in \mathbb{R})$

と書いたとき

$$(J\tau_{uv})_{u(p)} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

準備：

Lem 13.7.1 ： 各 $i=1,\cdots,n_2$ に対して

$\exists\, \tilde{v}_i \in C^\infty(M)$ s.t. $\left(\frac{\partial}{\partial v_k}\right)_p (\tilde{v}_i) = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i\neq k \end{cases}$

Hint ： $v_i : O' \to \mathbb{R},\ y \mapsto (v(y))_i$ は C^∞級 on O'.

この v_i を Thm 10.4.2 で延長すればよい．

Proof of Thm 13.3.1: 以下を示せばよい.

示 $\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(J\tau_{u(U)}\right)_{u(p)}\right)_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_p$

$i=1,\cdots,n$ を fix

Lem 13.7.1 の $\tilde{v}_i \in C^\infty(M)$ をとる.

$\left(\frac{\partial}{\partial v_k}\right)_p(\tilde{v}_i) = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$ に注意すると

以下を示せば十分

示 $\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p(\tilde{v}_i) = \left(\left(J\tau_{u(U)}\right)_{u(p)}\right)_{ij}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p (\tilde{v}_i) = \frac{\partial (\tilde{v}_i)_u}{\partial u_j}(u(p))$$

$$= \frac{\partial\, \tau_{uv}^{*}(\tilde{v}_i)_v}{\partial u_j}(u(p))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (\tilde{v}_i)_v}{\partial v_k}\Big(\underbrace{\tau_{vu}(u(p))}_{=v(p)}\Big) \frac{\partial (\tau_{vu})_k}{\partial u_j}(u(p))$$

∵連鎖律 (Prop 5.1.7)

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial v_k}\right)_p (\tilde{v}_i)}_{=\begin{cases} 1 & (i=k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}} \cdot \left((J\tau_{vu})_{u(p)}\right)_{kj}$$

$$= \left((J\tau_{vu})_{u(p)}\right)_{ij}$$

∎