Section 16 : 正則部分多様体

Part Ⅲ : 多様体上の微分論

- Section 13 : 接空間
- Section 14 : C^∞級写像
- Section 15 : 写像の微分
- Section 16 : 正則部分多様体
- Section 17 : ベクトル場とその flow (試験範囲外)

Section 16.1 : 正則部分多様体

設定 : $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ with $n \geq k$.

$M = (M, A_M)$: C^∞-n-mfd.

$S \subset M$

open とは限らない

相対位相でハウスドルフ位相空間とみなす.

記号

$\iota : S \to M$: 包含写像

Def 16.1.1 : $\mathcal{A}_S$: S 上の極大 k 次元 C^∞-atlas とする.

C^∞-k-mfd $(S, \mathcal{A}_S)$ が $M = (M, \mathcal{A}_M)$ の

k 次元正則部分多様体

regular submanifold

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 包含写像 $\iota : S \to M$ が C^∞ 級

(w.r.t. $\mathcal{A}_S, \mathcal{A}_M$)

かつ

$\forall p \in S$, $(d\iota)_p : T_pS \to T_pM$

が単射

(しばしば "$T_pS \subset T_pM$" とみなす.)

Ex 16.1.2 : 開部分多様体は正則部分多様体

Ex 16.1.3 : $\mathbb{R}^{n+1}$ を Ex 10.2.3 の意味で C^∞-$(n+1)$-mfd とみなす.

このとき $\mathcal{S}^n = (S^n, [A_0])$ (Ex 10.2.4) は

$\mathbb{R}^{n+1}$ の正則部分多様体

Thm 16.1.4 : k次元正則部分多様体の構造は存在するなら一意

証明は試験範囲外
(Section 16.2)

i.e.

$\mathcal{A}_S^1, \mathcal{A}_S^2$: 極大 k次元 C^∞-atlas on S

$(S, \mathcal{A}_S^1), (S, \mathcal{A}_S^2)$ が共に $(M, \mathcal{A}_M)$ の正則部分多様体とする。

このとき $\mathcal{A}_S^1 = \mathcal{A}_S^2$.

Prop 16.1.5 : $(S, \mathcal{A}_S)$: k次元正則部分多様体 in $M = (M, \mathcal{A}_M)$

$L = (L, \mathcal{A}_L)$: C^∞-l-mfd

$\varphi : M \to L$: C^∞級写像 とする.

このとき

$$\varphi|_S : S \to L \quad \text{は } C^\infty\text{級} \quad (\text{w.r.t. } \mathcal{A}_L, \mathcal{A}_S)$$
$$x \mapsto \varphi(x)$$

Hint : $\varphi|_S = \underbrace{\varphi}_{C^\infty} \circ \underbrace{\iota}_{C^\infty}$

Thm 16.1.6 : $(S, \mathcal{A}_S)$: k次元正則部分多様体 in $M = (M, \mathcal{A}_M)$

$L = (L, \mathcal{A}_L)$: C^∞-l-mfd

$\varphi : L \to M$: C^∞級写像

s.t. $\varphi(L) \subset S$ とする.

証明は試験範囲外
(Section 16.3)

このとき

$$\begin{aligned} \varphi_S : L &\to S \\ x &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$ は C^∞級 (w.r.t. $\mathcal{A}_L, \mathcal{A}_S$)

Section 16.2 : 正則値とその逆像

設定 : $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ with $n_1 \geq n_2$

M_i : C^∞-n_i-mfd $(i = 1, 2)$

$\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞級

Def 16.2.1: $q \in M_2$ が φ の正則値 (regular value)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall p \in \varphi^{-1}(\{q\})$,

$(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_qM_2$ が全射

Thm 16.2.2 $q \in M_2$ が φ の正則値であるとする.

証明は試験範囲外 (Section 16.3)

$S := \varphi^{-1}(\{q\}) \subset M_1$ は

$(n_1 - n_2)$ 次元正則部分多様体の構造を(一意に)持つ.

(Thm 16.1.6)

また各 $p \in S$ において

$$T_pS = \mathrm{Ker}(d\varphi)_p \quad \text{in } T_pM_1$$

正確には $(d\iota)_p(T_pS)$ のこと.
ただし $\iota : S \to M_1$ は包含写像

Ex 16.2.3 :

C^∞級写像 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{i=1}^{3} x_i^2$

について考える.

Claim $q = 1 \in \mathbb{R}$ は φ の正則値

∵ $^\forall p \in S := \varphi^{-1}(\{1\})$ をとる. $p \neq 0$ に注意.

示 $(d\varphi)_p : T_p\mathbb{R}^3 \to T_q\mathbb{R}$ が全射

3次元 1次元

i.e. $\operatorname{rank}(d\varphi)_p = 1$

Section 5 の意味と思っておく

いま Jacobi 行列 $(J\varphi)_p = \begin{pmatrix} 2p_1 & 2p_2 & 2p_3 \end{pmatrix}$

は $(d\varphi)_p$ の表現行列 w.r.t 座標基底 $(\because$ Thm 5.3.2$)$

なので

$\operatorname{rank}(d\varphi)_p = \operatorname{rank}(J\varphi)_p = 1$

$(\because\ p \neq 0\ )$

$\boxed{証}$

これより

$S := \varphi^{-1}(\{8\}) \subset \mathbb{R}^3$ は Thm 16.2.2 より

S は $\mathbb{R}^3$ の $\overset{=3-1}{2}$ 次元正則部分多様体となる.

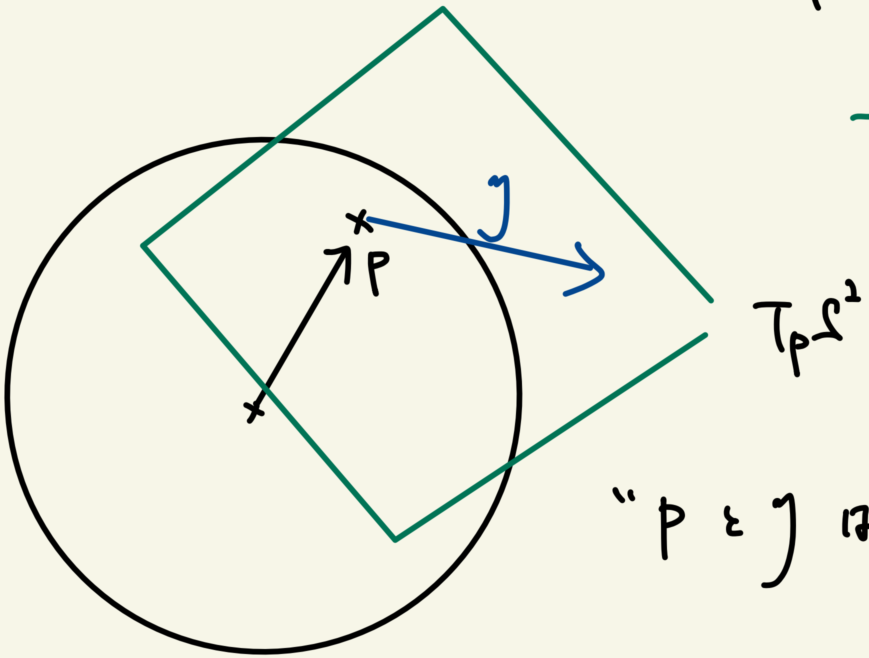
これは $(S^2, [A_0])$ のことである $($ $\overset{\text{cf.}}{\text{Ex}}$ 16.1.3 $)$

また 各 $p \in S = S^2$ について

$$T_pS^2 = \mathrm{Ker}\,(d\varphi)_p = \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \;\middle|\; (J\varphi)_p \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$\left(\overset{\shortparallel}{(d\iota)_p(T_pS^2)} \right)$$

$$= \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \;\middle|\; p \perp \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{"}p\text{ の直交補空間"}}$$



"p と y は直交する"

Ex 16.2.4 C^∞級写像 試験範囲外

$$\varphi : S^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_3$$

について考える.

Claim $q = 0 \in \mathbb{R}$ は φ の正則値

∵ $\forall p \in C := \varphi^{-1}(\{q\}) \subset S^2$ をとる. $(p_1, p_2) \neq (0,0)$ に注意.

示 $(d\varphi)_p : \underset{2次元}{T_p S^2} \to \underset{1次元}{T_q \mathbb{R}}$ が全射

$(\Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}(d\varphi)_p = 1)$

ここで $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_3$ とおくと C^∞級で

$$\tilde{\varphi}|_{S^2} = \varphi.$$

特に $(d\varphi)_p = (d\tilde{\varphi})_p|_{T_p S^2}$

$(d\tilde{\varphi})_p$ の表現行列 w.r.t. 座標基底 $(J\tilde{\varphi})_p$ は

$$(J\tilde{\varphi})_p = (0 \quad 0 \quad 1) \qquad \text{となる.}$$

特に $\mathrm{Ker}\,(d\tilde{\varphi})_p = \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \,\middle|\, a_3 = 0 \right\}$

Ex (6.2.3) より

$$T_pS^2 = \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \,\middle|\, p \perp \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\}$$

従って

$$\mathrm{Ker}\,(d\varphi)_p = (T_pS^2 \cap \mathrm{Ker}\,(d\tilde{\varphi})_p)$$
$$= \left\{ \sum_i a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \,\middle|\, a_3 = 0 \text{ かつ } \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\}$$

特に $\dim \mathrm{Ker}\,(d\varphi)_p = 1$ $\quad \left(\because \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

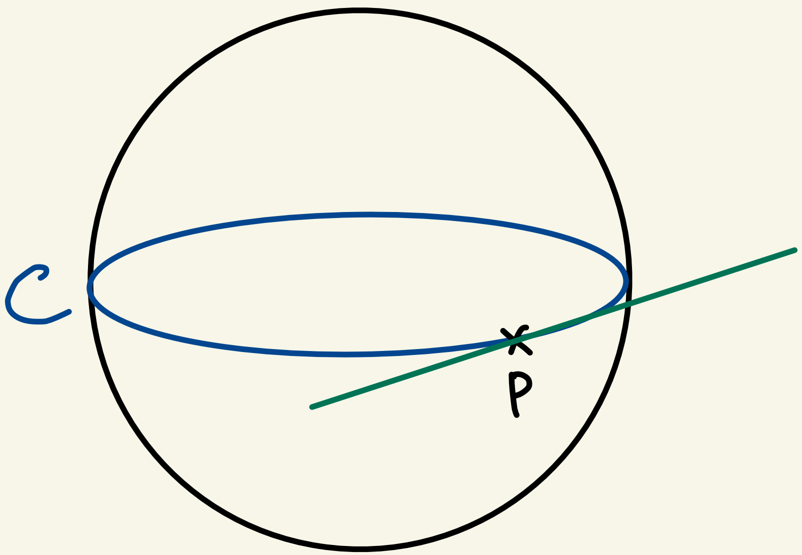
囗

これより $C \subset S^2$ は Thm 16.2.2 より 1次元正則部分多様体

(これは Ex 16.1.4 のもの)

また各 $p \in C$ について

$$T_pC = \mathrm{Ker}(d\psi)_p = \left\{ \sum_i a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \;\middle|\; a_3 = 0 \text{ かつ } p \perp \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



Section 16.3 : Thm 16.1.5, Thm 16.1.6, Thm 16.2.2 の証明

試験範囲外

しばらくの設定 :

設定 : $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ with $n > k$.

$M = (M, \mathcal{A}_M)$: C^∞-n-mfd.

$S \subset M$

open とは限らない

相対位相でハウスドルフ位相空間とみなす.

記号

$\iota : S \to M$: 包含写像

記号 : $\gamma : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $u \mapsto (u_1, \cdots u_k, 0 \cdots 0)$

単射線型写像

Prop 16.3.1 : $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $U_0 \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ とする.

写像 $\phi : U_0 \to \mathbb{R}^k$ について

$\gamma \circ \phi : U_0 \to \mathbb{R}^n$ が C^∞ 級 であるとする.

(in the sense of Sections)

このとき $\phi : U_0 \to \mathbb{R}^k$ は C^∞ 級

Hint Prop 5.1.5

Def 16.3.2

$(O, U, u) \in \mathcal{LC}(S ; \mathbb{R}^k)$ が "regular in $(M, \mathcal{A}_M)$"

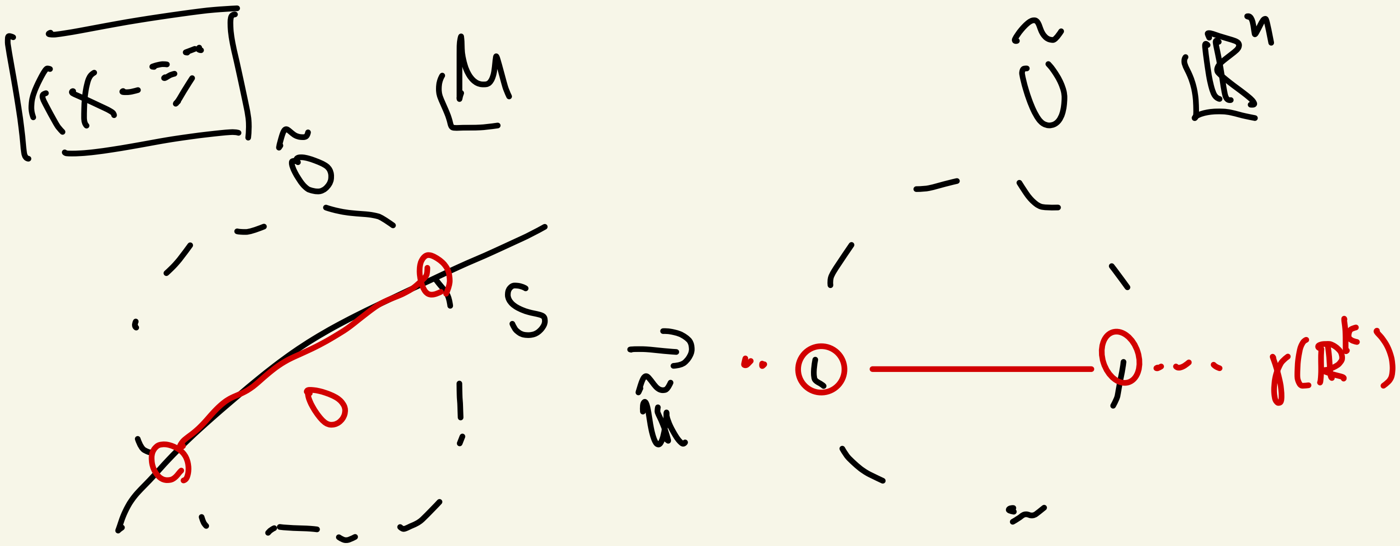
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\exists (\hat{O}, \hat{U}, \tilde{u}) \in \mathcal{A}_M$ s.t.

$O = S \cap \tilde{O}$ かつ $\iota_{u\tilde{u}}(u) = \gamma(u)$ $(^\forall u \in U)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\tilde{u}(u^{-1}(u))}$

図式

$$
\begin{array}{ccccc}
 & S & \xrightarrow{\iota} & M \\
 & \cup & \circlearrowleft & \cup \\
S \cap O' = & O & \longrightarrow & \tilde{O} \\
u & \downarrow\wr & \underset{\iota_{u\tilde{u}}}{\circlearrowleft} & \downarrow\wr \\
 & U & \longrightarrow & \tilde{U} \\
\text{open} & \cap & \circlearrowleft & \cap & \text{open} \\
 & \mathbb{R}^k & \xrightarrow[\gamma]{} & \mathbb{R}^n
\end{array}
$$



Prop 16.3.3 $(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{LC}(S; \mathbb{R}^k)$ が regular in $(M, \mathcal{A}_M)$ とする.

このとき $T_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$ は C^∞ 級

Proof: 演習問題74 と Prop 16.3.1 より 以下を示せばよい

(示) $\tilde{T}_{uv} : u(O \cap O') \to \mathbb{R}^n$ が C^∞ 級

$$u \mapsto \gamma(v(u^{-1}(u)))$$

(O, U, u), (O', V, v) は regular in $(M, \mathcal{A}_M)$ より

$(\hat{O}, \hat{U}, \hat{u})$, $(\tilde{O}', \hat{V}, \tilde{v}) \in \mathcal{A}_M$ で

$O = S \cap \hat{O}$ かつ $\iota_{u\hat{u}}(u) = \gamma(u)$ $(^\forall u \in U)$

$O' = S \cap \hat{O}'$ かつ $\iota_{v\tilde{v}}(v) = \gamma(v)$ $(^\forall v \in V)$

となるようにとれるのでとる。

ここで各 $u \in u(O \cap O')$ について $\gamma(u) \in \hat{u}(\hat{O} \cap \tilde{O}')$ に注意すると

"$\hat{u}(\underbrace{u^{-1}(u)}_{\in O \cap O' = S \cap \hat{O} \cap \tilde{O}'})$

$$\begin{aligned}
T_{\hat{u}\tilde{v}}(\gamma(u)) &= T_{\hat{u}\tilde{v}}(\iota_{u\hat{u}}(u)) \\
&= \tilde{v}(\hat{u}^{-1}(\hat{u}(u^{-1}(u)))) \\
&= \tilde{v}(u^{-1}(u)) \\
&= \tilde{v}(v^{-1}(v(u^{-1}(u)))) \\
&= \iota_{v\tilde{v}}(T_{uv}(u)) = \gamma(T_{uv}(u)) = \tilde{T}_{uv}(u)
\end{aligned}$$

これより

$$\tilde{\tau}_{uu} = \left(\overset{C^\infty\text{級}}{\tau_{\hat{u}\tilde{u}}} : \hat{u}(O \cap O') \to \mathbb{R}^n\right) \circ$$

$$\left(\gamma|_{u(O\cap O')} : \underset{\text{open} \subset \mathbb{R}^k}{u(O \cap O')} \to \underset{\text{open} \subset \mathbb{R}^n}{\hat{u}(O \cap O')}\right)$$

より $\tilde{\tau}_{uu} : u(O \cap O') \to \mathbb{R}^n$ も C^∞級。

($\because$ Thm 5.4.1) 図

Prop 16.3.4:

$(S, \mathcal{A}_S)$ が $(M, \mathcal{A}_M)$ の k 次元正則部分多様体とする.

このとき $\forall q \in S$, $\exists (O, U, u) \in \mathcal{A}_S$ s.t.

$q \in O$ かつ (O, U, u) は regular in $(M, \mathcal{A}_M)$

Proof: $\forall q \in S$ をとる.

Thm 15.5.1 より $(O, U, u) \in \mathcal{A}_S$

$(O', V, v) \in \mathcal{A}_M$ であって

$q \in O$ かつ $\iota(\underset{O}{\underset{\shortparallel}{O}}) \subset O'$ かつ $\iota_{vu}(u) = \gamma(u)$ $(\forall u \in U)$

となるものがとれるのである.

$O \underset{\text{open}}{\subset} S$ より $O = S \cap \Omega$ となる $\Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$ がとれるのでとる.

$$\tilde{O} := \Omega \cap O' \underset{\text{open}}{\subset} M$$

$$\hat{U} := \psi(\Omega \cap O') \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$$

$$\hat{\psi} := \psi|_{\Omega \cap O'} : \tilde{O} \xrightarrow{\sim} \hat{U}$$ とおく.

Lem 10.5.1 より $(\tilde{O}, \hat{U}, \hat{\psi}) \in \mathcal{A}_M$.

(示) $O = S \cap \tilde{O}$ かつ $\eta_{u\tilde{u}}(u) = \gamma(u)$ $({}^\forall u \in U)$

まず $S \cap \tilde{O} = S \cap \Omega \cap O' = O \cap O' = O$.

次に $u \in U$ について

$$\eta_{u\hat{u}}(u) = \hat{u}(\underbrace{u^{-1}(u)}) = v(u^{-1}(u)) = \eta_{uv}(u) = \gamma(u) \quad \blacksquare$$

$\in O \subset \tilde{O} = \Omega \cap O'$

Thm 16.1.5 は次の Thm から示す.

Thm 16.3.5

$\mathcal{A}_S^{reg} := \{ (O, U, u) \in LC(S ; \mathbb{R}^k) \mid (O, U, u)$ は regular in $(M, \mathcal{A}_M) \}$

とおく.

(1) $\displaystyle\bigcup_{(O,U,u) \in \mathcal{A}_S^{reg}} O \neq S$ のとき, S は $(M, \mathcal{A}_M)$ の k 次元正則部分多様体の構造を持たない.

(2) $\displaystyle\bigcup_{(O,U,u) \in \mathcal{A}_S^{reg}} O = S$ とする.

このとき $\mathcal{A}_S^{reg}$ は S 上の k 次元 C^∞-atlas であり

$(S, [\mathcal{A}_S^{reg}])$ は $(M, \mathcal{A}_M)$ の k 次元正則部分多様体

また $(S, \mathcal{A}_S)$ が $(M, \mathcal{A}_M)$ の k 次元正則部分多様体

となるなら $\mathcal{A}_S = [\mathcal{A}_S^{reg}]$.

Proof of Thm 16.3.5

(1) : Prop 16.3.4 から従う.

(2) : $\displaystyle\bigcup_{(O,U,u)\in A_S^{reg}} O = S$ となる.

$A_S^{reg} \in C^\infty\text{-atlas}(S; \mathbb{R}^k)$ となることは Prop 16.3.3 から従う.

$(S, [A_S^{reg}])$ が (M, A_M) の k 次元正則部分多様体 となることを示そう.

示1 $\iota : S \to M$: C^∞ 級

示2 $d\iota_p : T_pS \to T_pM$: 単射

regular in (M, A_M) の性質から従う (詳細略)

次に $(S, \mathcal{A}_S)$ が $(M, \mathcal{A}_M)$ の k 次元正則部分多様体とする.

$\mathcal{A}_S = [\mathcal{A}_S^{reg}]$ を示そう.

Prop 16.3.4 より

$\mathcal{A}_S^{reg} \cap \mathcal{A}_S$ が S 上の C^∞-atlas であることが分かる.

$\mathcal{A}_S$, $[\mathcal{A}_S^{reg}]$ はそれぞれ $\mathcal{A}_S^{reg} \cap \mathcal{A}_S$ を含む極大 C^∞-atlas

であるから Thm 9.1.6 より $\mathcal{A}_S = [\mathcal{A}_S^{reg}]$.

$\boxtimes$

Thm 16.1.6 : $(S, \mathcal{A}_S)$: k次元正則部分多様体 in $M = (M, \mathcal{A}_M)$

(再掲)

$L = (L, \mathcal{A}_L)$: C^∞-ℓ-mfd

$\varphi : L \to M$: C^∞級写像

s.t. $\varphi(L) \subset S$ とする.

このとき

$$\varphi_S : L \to S \quad \text{は } C^\infty \text{級 (w.r.t. } \mathcal{A}_L, \mathcal{A}_S)$$
$$x \mapsto \varphi(x)$$

Proof of Thm 16.1.6 　$^\forall p \in L$ をとる.

Thm 14.1.2 より以下を示せばよい

(示) $^\exists(O_L, U_L, u_L) \in \mathcal{A}_L$, $^\exists(O, U, u) \in \mathcal{A}_S$ s.t.

$$\begin{cases} p \in O_L \cap \varphi_S^{-1}(O) \text{ かつ} \\ (\varphi_S)_{u_L u} : u_L(O_L \cap \varphi_S^{-1}(O)) \to U \text{ は } C^\infty \text{級} \end{cases}$$

Prop 16.3.3 より

$(O, U, u) \in \mathcal{A}_S$ であって

$\varphi(p) \in O$ かつ (O, U, u) は regular in $(M, \mathcal{A}_M)$

となるものがとれるのである。

特に $(\hat{O}, \hat{U}, \tilde{u}) \in \mathcal{A}_M$ であって

$O = S \cap \tilde{O}$ かつ $\iota_{u\tilde{u}}(u) = \gamma(u) \quad (\forall u \in U)$

となるものがとれるのである。

$p \in \varphi^{-1}(\tilde{O}) = \varphi_s^{-1}(0) \underset{\text{open}}{\subset} L$ に注意

$(O_L, U_L, \psi_L) \in \mathcal{A}_L$ であって $p \in O_L \subset \varphi_s^{-1}(0)$ となるものを fix.

(Lem 10.5.1 より そのようなる (O_L, U_L, ψ_L) が存在)

示 $(\varphi_s)_{\psi_L \psi} : \psi_L(O_L \cap \varphi_s^{-1}(0)) \to U$ は C^∞ 級

$$u \mapsto \psi(\varphi_s(\psi_L^{-1}(u)))$$

($\underset{\text{Prop 5.1.1}}{\Leftrightarrow}$ $((\varphi_s)_{\psi_L \psi})_i \in C^\infty(\psi(O_L \cap \varphi_s^{-1}(0)))$ $(\forall i = 1, \cdots, k)$)

$\varphi : L \to M$ は C^∞ 級なので

$$\overset{\varphi_S^{-1}(O)}{}$$

$$\varphi_{\mathfrak{u}_L \tilde{\mathfrak{u}}} : \mathfrak{u}_L\left(O_L \cap \underset{=\varphi_S^{-1}(O)}{\varphi^{-1}(\tilde{O})}\right) \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$$

$$u \mapsto \tilde{\mathfrak{u}}(\varphi(\mathfrak{u}_L^{-1}(u)))$$

は C^∞ 級 ($\because$ Thm 14.1.2)

ここで

$$= \iota \circ \varphi_S : L \to M$$ 及び

$$\tilde{\mathfrak{u}} \circ (\iota|_O) = (\iota_{\mathfrak{u}\tilde{\mathfrak{u}}}) \circ \mathfrak{u} = (\gamma|_U) \circ \mathfrak{u} : O \to \tilde{U}$$ に注意すると

$$\varphi_{\mathfrak{u}_L \tilde{\mathfrak{u}}} = (\gamma|_U) \circ (\varphi_S)_{\mathfrak{u}_L \mathfrak{u}}$$

特に $u \in \pi_L(O_L \cap \varphi^{-1}(\tilde{O})) = \pi_L(O_L \cap \varphi_s^{-1}(0))$ に対して

$$(\varphi_{\mathcal{U}_L \tilde{\mathcal{U}}})(u) = \left(((\varphi_s)_{\mathcal{U}_L \mathcal{U}})_1(u), \dots, ((\varphi_s)_{\mathcal{U}_L \mathcal{U}})_k(u), 0, \dots, 0 \right)$$

$\varphi_{\mathcal{U}_L \tilde{\mathcal{U}}}$ は C^∞ 級なので $((\varphi_s)_{\mathcal{U}_L \mathcal{U}})_i$ は C^∞ 級関数 $(i = 1, \dots, k)$

(∵ Prop 5.1.3)

∎

以降の設定：

設定：$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ with $n_1 \geq n_2$

M_i : C^∞-n_i-mfd $(i = 1, 2)$

$\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞級

Thm 16.2.2 $q \in M_2$ が φ の正則値であるとする．

（再掲） $S := \varphi^{-1}(\{q\}) \subset M_1$ は

$(n_1 - n_2)$ 次元正則部分多様体の構造を（一意に）持つ．

Thm 16.1.6

また各 $p \in S$ において

$$T_pS = \mathrm{Ker}(d\varphi)_p \quad \text{in } T_pM_1$$

正確には $(d\iota)_p(T_pS)$ のこと．

ただし $\iota : S \to M_1$ は包含写像

Proof of Thm 16.2.2 :

$k := n_1 - n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とおく.

Thm 16.3.5 より 以下を示せばよい.

示 $\forall p \in S$, $\exists (O, U, u) \in LC(S : \mathbb{R}^k)$

s.t. $p \in O$ かつ (O, U, u) は regular in (M_1, A_1)

$\forall p \in S$ をとる.

$\varphi(p) = q$ かつ

$(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_qM_2$ が全射であることに注意

$\pi : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2},\ u \mapsto (u_{k+1}, \cdots, u_{n_1})$ $\quad (k = n_1 - n_2)$

全射線型

$\Phi : \mathrm{Ker}\,\pi \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^k,\ u \mapsto (u_1, \cdots, u_k)$ とおく.

$(\Phi^{-1} = \gamma : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n_1};\ u \mapsto (u_1, \cdots u_k, 0 \cdots 0))$

Thm 15.5.2 より $(\tilde{O}, \tilde{U}, \tilde{u}) \in A_1$, $(O', V, v) \in A_2$ であって

$p \in \tilde{O}$ かつ $\tilde{u}(p) = 0 \in \tilde{U}$ かつ $\varphi(\tilde{O}) \subset O'$

かつ $\varphi_{\tilde{u}v}(u) = \pi(u) \quad (\forall u \in \tilde{U})$

となるものがとれるのでとる.

特に $v(q) = v(\varphi(p)) = v(\varphi(\tilde{u}^{-1}(0))) = \varphi_{\tilde{u}v}(0)$

$= \pi(0) = 0$.

$p \in O := S \cap \tilde{O} \underset{\text{open}}{\subset} S$

$U := \Phi(\hat{U} \cap \operatorname{Ker}\pi) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^k$ とおく.

open in $\operatorname{Ker}\pi$

Claim: $\hat{U} \cap \operatorname{Ker}\pi = \hat{u}(S \cap \hat{O})$

$\subset$) ${}^{\forall} u \in \hat{U} \cap \operatorname{Ker}\pi$ をとる.

$v(\varphi(\hat{u}^{-1}(u))) = \varphi_{\hat{u}v}(u) = \pi(u) = 0 = v(q)$ より

$\varphi(\hat{u}^{-1}(u)) = q \quad (\because v$ は単射$)$

特に $\hat{u}^{-1}(u) \in S = \varphi^{-1}(\{q\})$

従って $u \in \hat{u}(S \cap \tilde{O})$.

これで $\hat{U} \cap \operatorname{Ker}\pi \subset u(S \cap \tilde{O})$ が示された.

逆に $^\forall u \in \tilde{u}(S \cap \tilde{O})$ をとる。

$$\pi(u) = \varphi_{\tilde{u}\circ}(u) = v(\varphi(\underbrace{\tilde{u}^{-1}(u)}_{\in S = \varphi^{-1}(\{q\})}))$$

$$= v(q) = 0.$$

従って $u \in \tilde{U} \cap \mathrm{Ker}\,\pi$.

これで $u(S \cap \tilde{O}) = \hat{U} \cap \mathrm{Ker}\,\pi$ も示された。 ∎

$$\mathfrak{U} : \underset{\substack{\| \\ S \cap \tilde{O}}}{O} \xrightarrow{\sim} \underset{\substack{\| \\ \Phi(\hat{U} \cap \mathrm{Ker}\,\pi) \\ \| \\ \Phi(\tilde{u}(S \cap \hat{O}))}}{U},\quad x \mapsto \Phi(\tilde{u}(x))$$ とおく。

$(O, U, u) \in LC(S; \mathbb{R}^k)$ （詳細略）

㊟ (O, U, u) は regular in (M_1, A_1).

次を示せばよい

㊟ $O = S \cap \tilde{O}$ かつ $\iota_u \tilde{u}(u) = \gamma(u)$ $(\forall u \in U)$

$O = S \cap \tilde{O}$ は O の def から従う.

$\forall u \in U$ をとる.

㊟ $\iota_u \tilde{u}(u) = \gamma(u)$.

$$\mathrm{Inut}(u) = \tilde{\mathfrak{u}}(\mathfrak{u}^{-1}(u))$$

$$= \tilde{\mathfrak{u}}(\tilde{\mathfrak{u}}^{-1}(\Psi^{-1}(u))) \quad (\because \mathfrak{u} \text{ の def})$$

$$= \Psi^{-1}(u) = \gamma(u).$$

$\boxtimes$