Section 17：ベクトル場とその flow

試験範囲外

Part Ⅲ：多様体上の微分論

- Section 13：接空間
- Section 14：C^∞級写像
- Section 15：写像の微分
- Section 16：正則部分多様体
- Section 17：ベクトル場とその flow（試験範囲外）

内容

一径数変換群（時間発展）

積分曲線 ↑ ↓ 無限小

ベクトル場

Section 17.1：一径数変換群

設定：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

└ $M = (M, \mathcal{A})$：C^∞-n-mfd.

記号：$\mathbb{R}$：C^∞-1-mfd とみなす.

└ $\mathbb{R} \times M$：直積多様体（cf. Section 11）.

Def 17.1.1:

C^∞級写像 $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M,\ (t, x) \mapsto \varphi_t(x)$ が

群 $(\mathbb{R}, +)$ の M への作用を定めるとき、

$\left(\text{i.e.}\ \ \varphi_0(x) = x,\quad \varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(x)) = \varphi_{t_1+t_2}(x) \right)$

φ を M 上の (complete) 完備な一径数変換群とよぶ。
(one-parameter transformation group)

以降 OPTG

Ex 17.1.2 :

$$\tilde{\rho} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \underset{\substack{\| \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}}{(t, x)} \mapsto \overset{\substack{\tilde{\rho}_t(x) \\ \|}}{\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & \\ \sin t & \cos t & \\ & & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

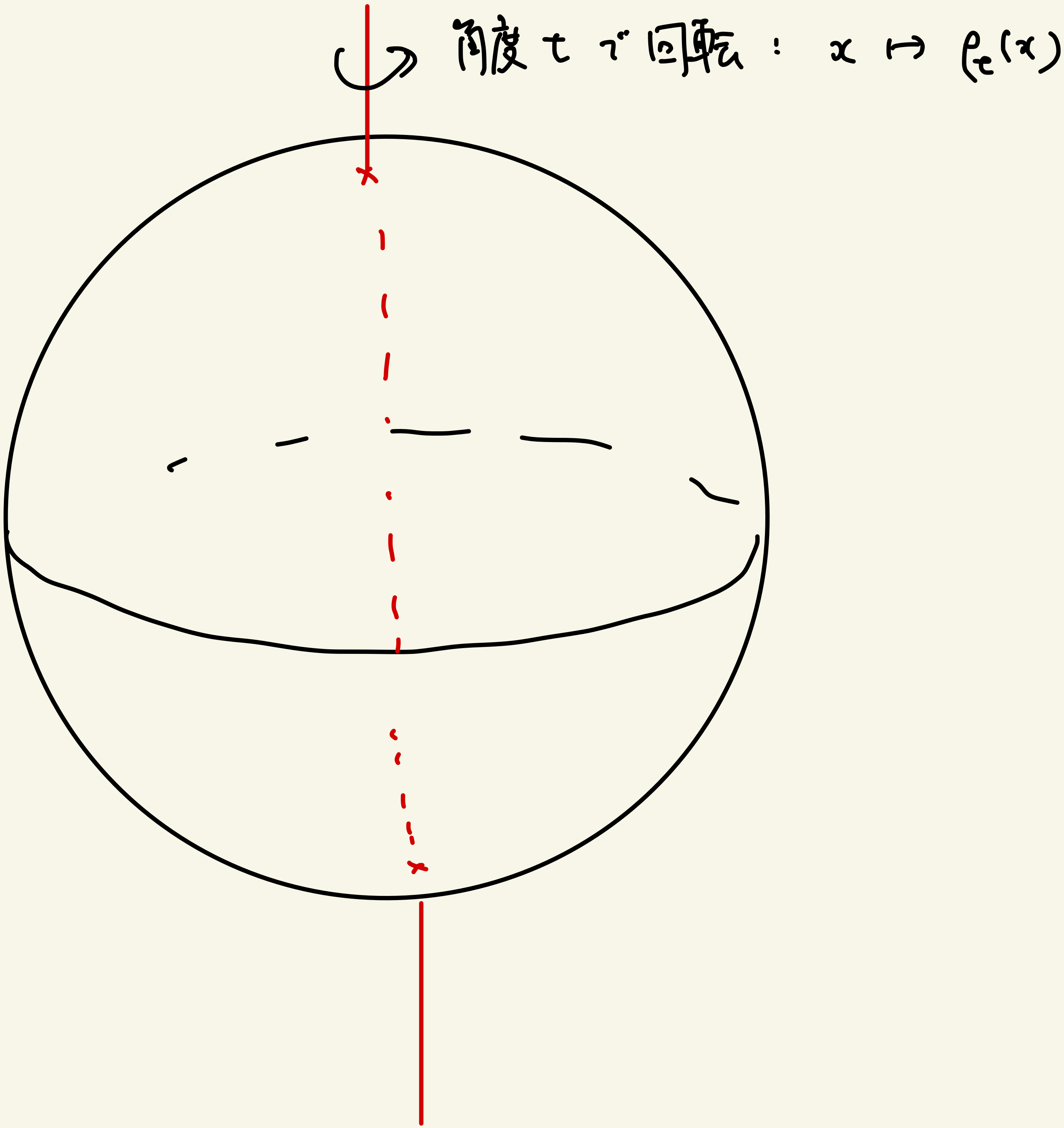
は $\mathbb{R}^3$ 上の complete OPTG.

また:

$$\rho : \mathbb{R} \times S^2 \to S^2, \quad (t, x) \mapsto \underset{\substack{\| \\ \tilde{\rho}_t(x)}}{\rho_t(x)}$$

($\tilde{\rho}$ の S^2 への制限)

は S^2 上の complete OPTG.


角度 t で回転 : $x \mapsto \rho_t(x)$

気持ち：OPTG は "時間発展" (time evolution)

Ex 17.1.3：$M = \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{位置}} \times \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{速度ベクトル}} \quad (\cong \mathbb{R}^6)$

$\rho : \mathbb{R} \times M \to M, \quad (t, (x, v)) \mapsto (\underbrace{x + tv}_{t\text{秒後の位置}}, v)$

は complete OPTG

$\mathbb{R}^3$における質点の

等速直線運動を表す時間発展

完備ではない OPTG:

Def 17.1.4: $\{0\} \times M \subset \tilde{O} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R} \times M$ とする.

$\rho : \tilde{O} \to M,\ (t, x) \mapsto \rho_t(x)$: C^∞級

$(\rho, \tilde{O})$ が M 上の一径数変換群 (OPTG)

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 各 $x \in M$ について $\{t \in \mathbb{R} \mid (t, x) \in \hat{O}\}$ は開区間

かつ "定義されている範囲で ρ は群作用"

(i.e. ① $\rho_0(x) = x \quad (\forall x \in M)$

かつ

② $(t_2, x) \in \tilde{O},\ (t_1, \rho_{t_2}(x)) \in \tilde{O}$ のとき

$(t_1 + t_2, x) \in \tilde{O}$ かつ $\rho_{t_1 + t_2}(x) = \rho_{t_1}(\rho_{t_2}(x))$)

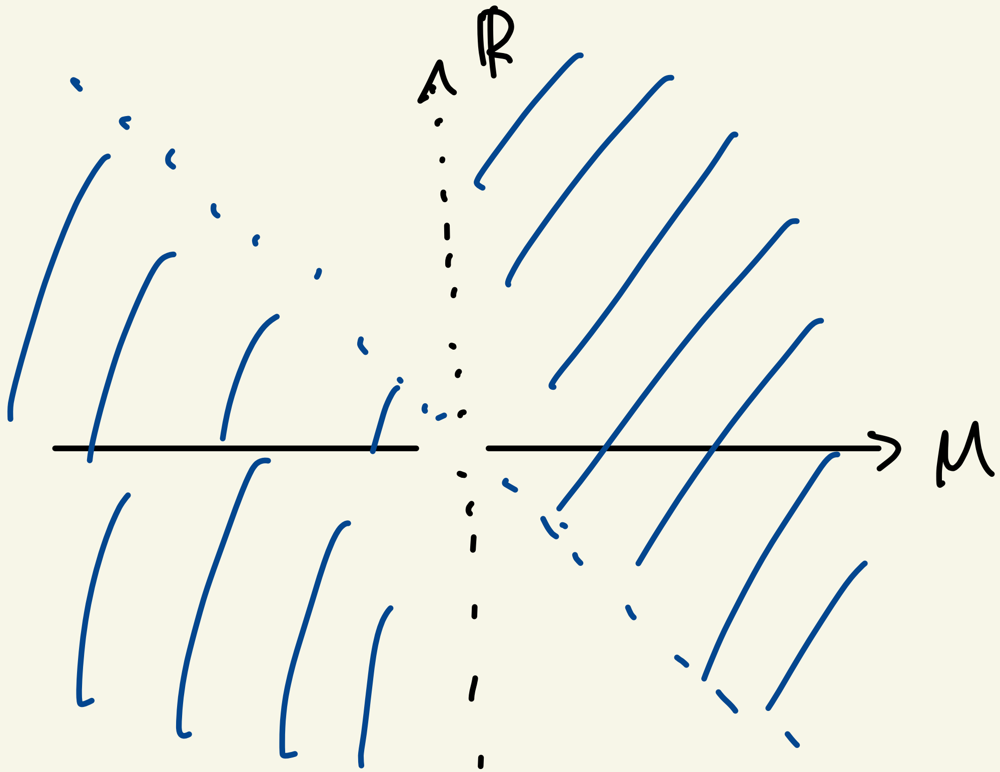
$X_{\mathcal{E}}$: complete $\iff \hat{O} = \mathbb{R} \times M$.

Ex 17.1.5 : $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\{0\} \times M \subset \tilde{O} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R} \times M$ を

$$\tilde{O} := \left\{ (\tau, x) \in \mathbb{R} \times M \;\middle|\; \begin{array}{c} x > 0 \text{ かつ } x + t > 0 \\ \text{or} \\ x < 0 \text{ かつ } x + t < 0 \end{array} \right\}$$

とおく.



このとき $\rho : \tilde{O} \to M,\ (t,x) \mapsto x+t$

とすると

$(\rho, \tilde{O})$ は OPTG

（$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 上で質点が右に移動していく時間発展）

Def 17.1.6:

$\text{OPTG}(M) := \{(\varphi, \hat{o}) \mid \text{OPTG on } M\}$

Section 17.2: ベクトル場

設定: $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M = (M, \mathcal{A})$: C^∞-n-mfd.

記号: $C^\infty(M) := C^\infty(M; \mathcal{A})$

Def 17.2.1 :

$X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ が M 上の (C^∞級) ベクトル場 (vector field)

$f \mapsto Xf$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ X は 線型

かつ

"場のライプニッツ則" を満たす

i.e. $\forall f, g \in C^\infty(M)$,

$$X(fg) = (Xf)\cdot g + f\cdot(Xg) \quad \text{in } C^\infty(M)$$

Def 17.2.2 :

$\mathfrak{X}(M) := \{ M$ 上のベクトル場$\}$ とおく.

Prop 17.2.3 :

$\mathfrak{X}(M)$ は $L(C^\infty(M), C^\infty(M))$ の線型部分空間

Hint : easy.

Prop 17.2.4: 各 $h \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ について

$$hX : C^\infty(M) \to C^\infty(M),\ f \mapsto h\cdot(Xf)$$

X の関数倍

とおくと $hX \in \mathfrak{X}(M)$.

また $C^\infty(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$

$$(h, X) \mapsto hX$$

は $\mathfrak{X}(M)$ に $C^\infty(M)$ 加群の構造を定める.

加群の定義：

Def 17.2.5：A：結合的 $\mathbb{R}$ 代数

V：ベクトル空間　とし

$\phi : A \times V \to V,\ (a, v) \mapsto av$

が定まっているとする．

V が A-加群である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ϕ は双線型かつ

$$(a_1 a_2) \cdot v = a_1 (a_2 v)$$

$\forall a_1, a_2 \in A, \forall v \in V$

Ex 17.2.6 :　$M = U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とする.

このとき 各 $i = 1, \cdots, n$ について

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

とおくと $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(U)$.

また $h_1, \cdots, h_n \in C^\infty(U)$ について

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} : C^\infty(U) \to C^\infty(U),\ f \mapsto \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

も $\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(M)$.

ベクトル場 : 偏微分の一般化

Remark : M も $\emptyset$ でっ $n \geq 1$ のとき $\mathcal{H}(n)$ は無限次元

（証明略）

ベクトル場と接ベクトル

Prop 17.2.7: 各 $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ について

$X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto (Xf)(p)$

とおくと $X_p \in T_pM$.

Prop 17.2.8: $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$X = Y \iff \forall p \in M,\ X_p = Y_p$

Prop 17.2.9 : $X \in \mathfrak{X}(M)$ とする.

各 $(O, U, \varphi) \in \mathcal{A}$ について

$\exists! \, h_1, \cdots, h_n \in C^\infty(O)$ s.t.

$$\forall p \in O, \quad X_p = \sum_{i=1}^{n} h_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

ベクトル場とは各点で滑らかに接ベクトルを定めたもの

解析的にベクトル場を定める方法：

Thm 17.2.10：各 $q \in M$ について

接ベクトル $y_q \in T_qM$ が定まっていて

次の条件を満たすとする。

条件：$\forall p \in M$, $\exists (O, U, u) \in A$ with $p \in O$ s.t.

各 $q \in O$ について $y_q = \sum_{i=1}^{n} a_i(q) \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_q$ $\quad (a_i(q) \in \mathbb{R})$

と書いたとき

$\forall i$, $a_i : O \to \mathbb{R}$, $q \mapsto a_i(q)$ が C^∞ 級

このとき $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, $f \mapsto Xf : M \to \mathbb{R}$ とおくと $X \in \mathfrak{X}(M)$.

$\qquad x \mapsto y_x f$

正則部分多様体への制限

Prop 17.2.11 : $S \subset M$・正則部分多様体とする.

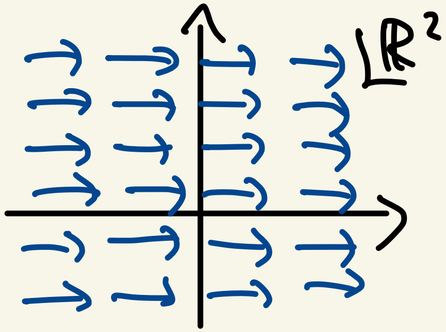
$X \in \mathfrak{X}(M)$ で各 $p \in S$ について $X_p \in T_pS \ (\subset T_pM)$

を満たすとき

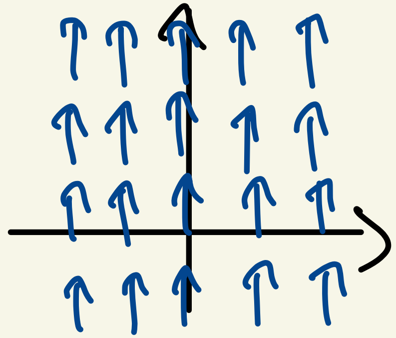
$\exists ! \ X|_S \in \mathfrak{X}(S)$ s.t. $(X|_S)_p = X_p \ (\forall p \in S)$

Ex 17.2 12 : $M = \mathbb{R}^2$ において

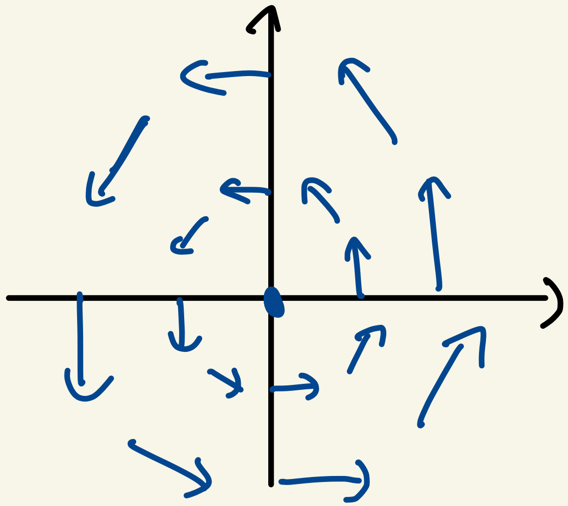
$X = \frac{\partial}{\partial x}$



$X = \frac{\partial}{\partial y}$



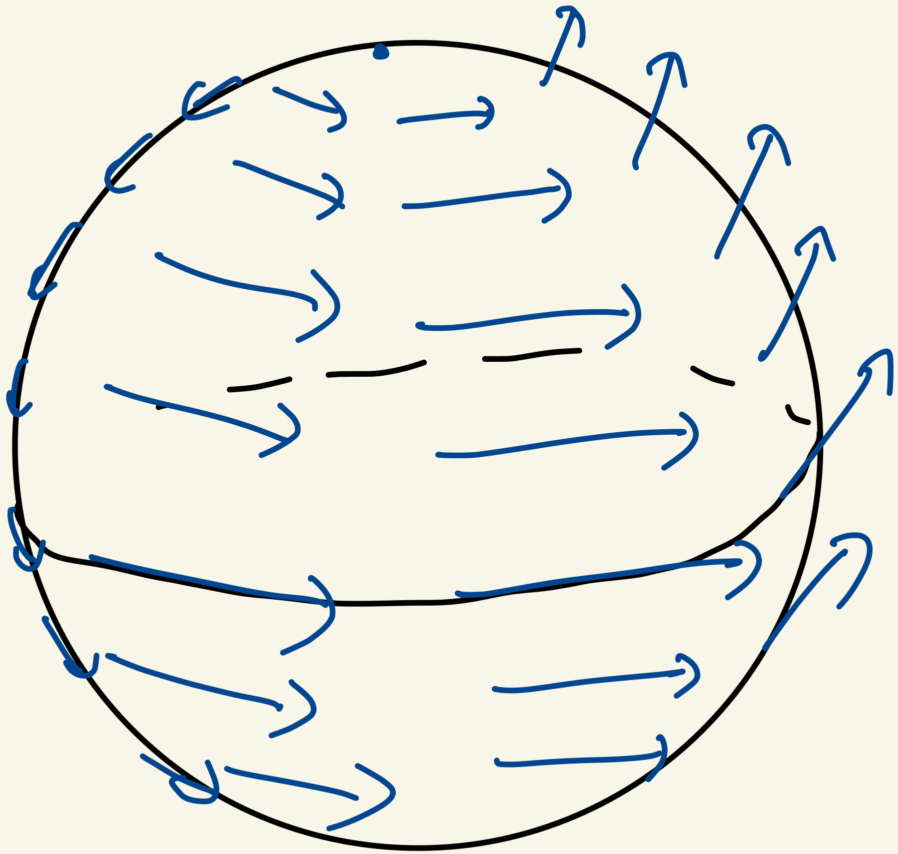
$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$



Ex 17.2.13

S^2 上のベクトル場の例

$$X = \underbrace{\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)}_{\in\ \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)}\Big|_{S^2}$$



Thm 17.2.14 (髪の毛定理)

“つむじ”の存在

$^\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $^\forall X \in \mathfrak{X}(S^{2k})$, $^\exists p \in S^{2k}$ s.t. $X_p = 0$

“微分トポロジー”の代表的な定理.

Section 17.3 : OPTG とベクトル場

設定: $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M = (M, \mathcal{A})$: C^∞-n-mfd.

ゴール:

一径数変換群（時間発展）

積分曲線 ↑　↓ 無限小

ベクトル場

Prop 17.3.1 : 各 $(\varrho, \tilde{O}) \in \mathrm{OPTG}(M)$,

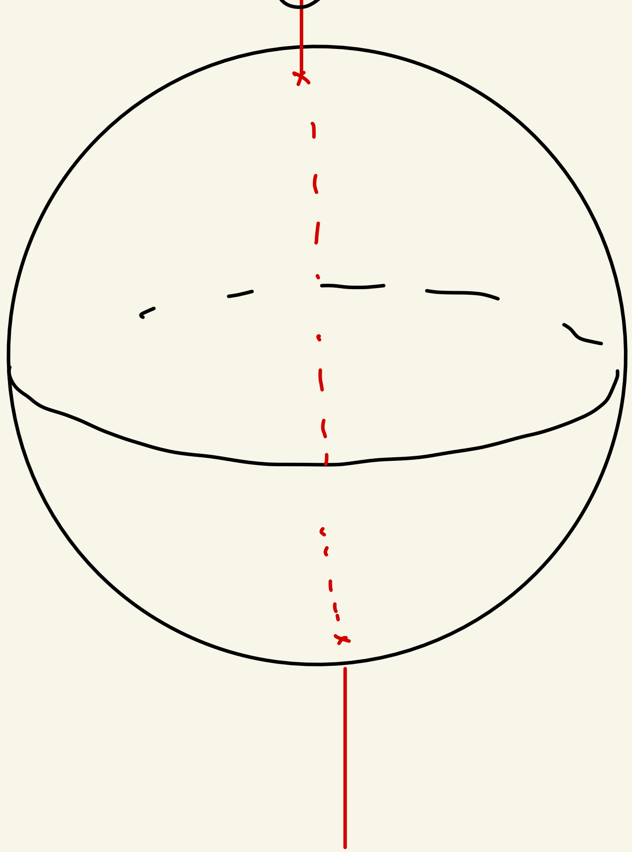
$$X_{(\varrho,\tilde{O})} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$
$$f \mapsto X_{(\varrho,\tilde{O})}f : M \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \lim_{t\to 0} \frac{f(\varrho_t x) - f(x)}{t}$$

は well-defined で $X_{(\varrho,\tilde{O})} \in \mathfrak{X}(M)$.

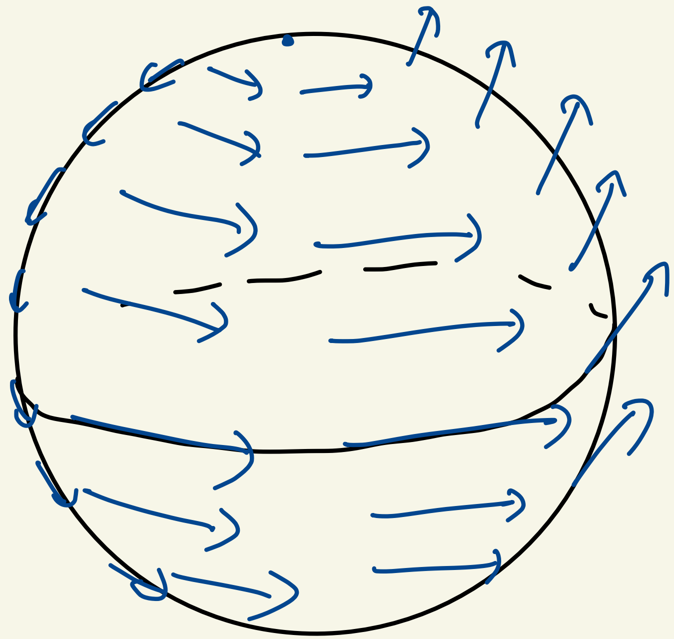
OPTG を"無限小"で視るとベクトル場

Ex 17.3.2

角度tで回転 : $x \mapsto \rho_t(x)$



$\rightsquigarrow$



$(\rho, \tilde{O})$: Ex 17.1.2 のもの

$\shortparallel$

$\mathbb{R}\times S^2$

$$X_{(\rho,\tilde{O})} = \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)\Big|_{S^2}$$

(cf. Ex 17.2.13)

ゴール：ベクトル場 $\longrightarrow$ OPTG
積分曲線

Def 17.3.3：（曲線の速度ベクトル）

$(a,b) \subset \mathbb{R}$：開区間（open submfd）

$c : (a,b) \to M$：C^∞級写像 とする．

c を M 上の C^∞級曲線と呼び

各 $s \in (a,b)$ について

$$\dot{c}(s) := (dc)_s\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_s\right) \in T_{c(s)}M$$

を時刻 s における曲線 c の速度ベクトルと呼ぶ

$$\left(\text{i.e.} \quad \dot{c}(s)(f) := \lim_{\tau \to 0} \frac{f(c(s+\tau)) - f(c(s))}{\tau} \quad (f \in C^\infty(M)) \right)$$

Def 17.3.4

$X \in \mathfrak{X}(M)$, $c : (a, b) \to M$: C^∞級曲線とする.

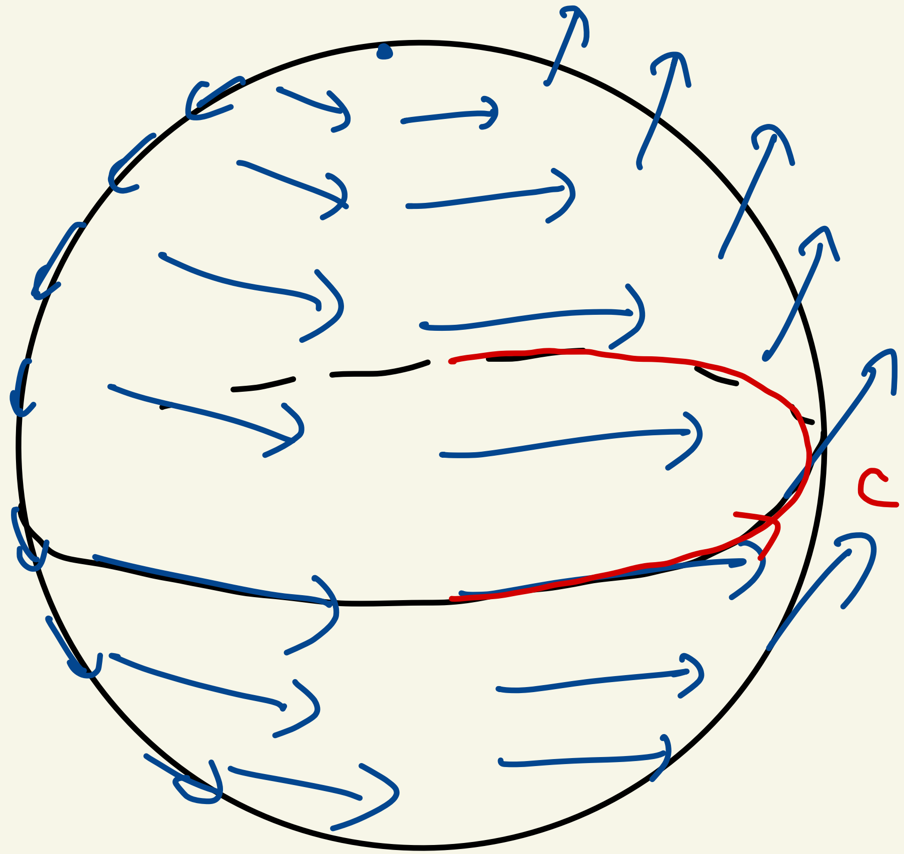
c が X の積分曲線 (integral curve)

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall s \in (a, b)$, $\dot{c}(s) = X_{c(s)}$ in $T_{c(s)}M$.

Ex 17.3.5

$$X = \underbrace{\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right)}_{\in\, \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)}\Big|_{S^2}$$ について

(Ex 17.2.13)



$C : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to S^2,\ t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$

は X の積分曲線

Thm 17.3.6 $X \in \mathfrak{X}(M)$ とする.

(1) : $p \in M$ とする.

$\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$,

$\exists c : (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to M$: Xの積分曲線 s.t. $c(0) = p$

時刻 0 で p を通る積分曲線は存在する.

(2) $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ を fix

$c_1, c_2 : (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to M$: Xの積分曲線

s.t. $c_1(0) = c_2(0)$

このとき $c_1 = c_2$

(3) $\{0\} \times M \subset {}^{\exists}\tilde{\hat{O}}_X \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R} \times M$

s.t. 各 $x \in M$ について

$0 \in \{t \in \mathbb{R} \mid (t, x) \in \hat{O}_X\}$ は開区間

かつ

${}^{\exists !} c_x^X : \{t \in \mathbb{R} \mid (t, x) \in \hat{O}_X\} \to M$

は X の積分曲線で $c_x^X(0) = x$.

(4) (3) の $\tilde{\hat{O}}_X$ について

$\varphi_X : \tilde{\hat{O}}_X \to M, \quad (t, x) \mapsto c_x^X(t)$ とおくと OPTG.

Hint: 一階線型常微分方程式の解の存在と一意性, 初期値に対する滑らかさ.

Thm 17.3.7 (1) 各 $X \in \mathfrak{X}(M)$ について

Thm 17.3.6 の $(\rho_X, \tilde{O}_X)$ をとると

$$X_{(\rho_X, \tilde{O}_X)} = X$$

(Prop 17.3.1)

(2) 各 $(\rho, \hat{O}) \in OPTG(M)$ について

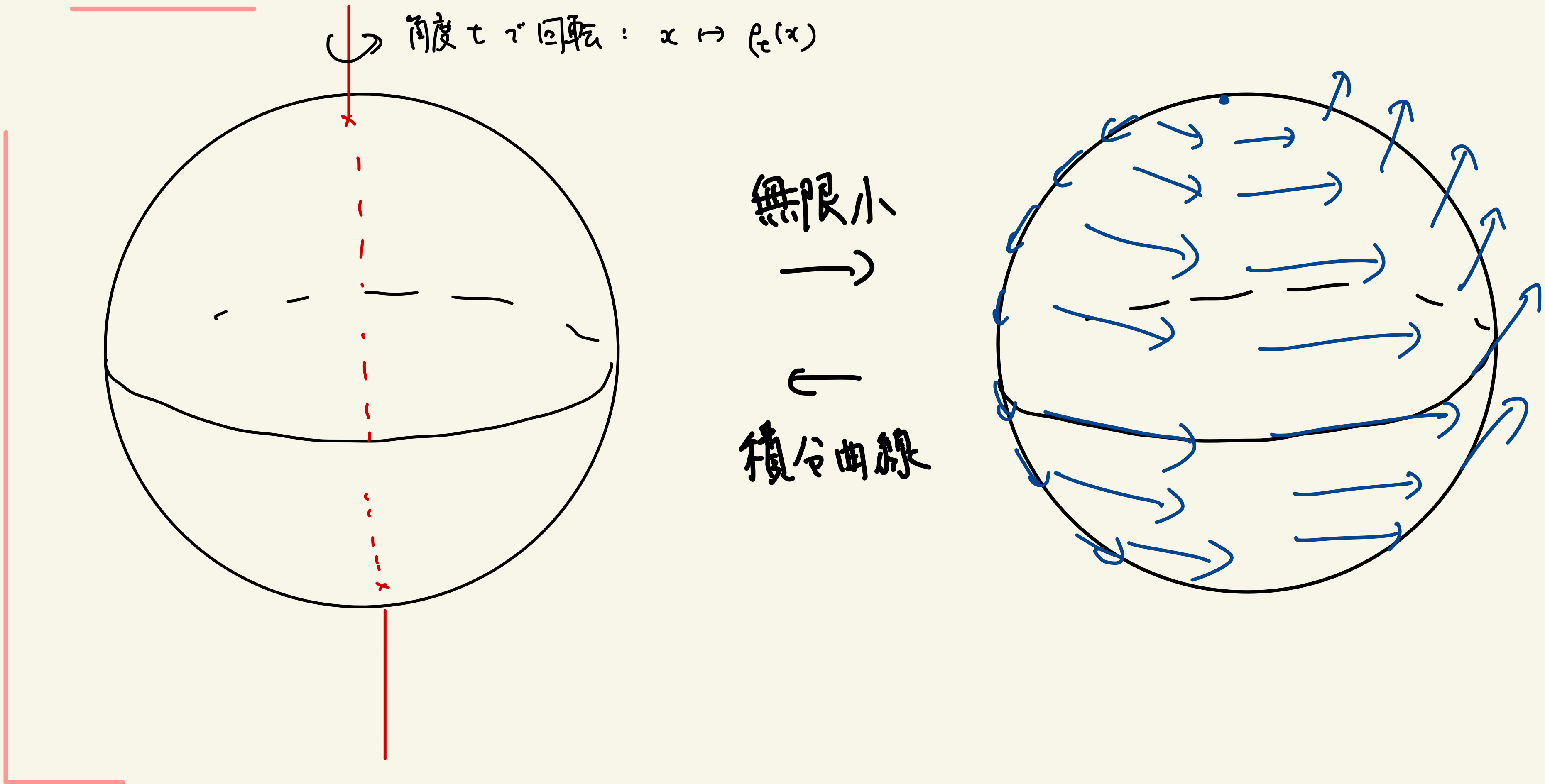
$Y := X_{(\rho, \hat{O})} \in \mathfrak{X}(M)$ についての Thm 17.3.6 の

$(\rho_Y, \tilde{O}_Y)$ をとると

$$\rho|_{\hat{O} \cap \tilde{O}_Y} = \rho_Y|_{\hat{O} \cap \tilde{O}_Y}$$

Rem: {"定義域極大" な OPTG on M} $\underset{1:1}{\leftrightarrow} \mathfrak{X}(M)$ (詳細略)

Ex 17.3.8



滑らかなOPTG(時間発展)はベクトル場で統制される.

時間の都合で断念：

- Lie 微分, Lie bracket

  Lie 微分 ： OPTG でベクトル場を微分する.

  Lie bracket ： ベクトル場でベクトル場を微分する.

併せて勉強しておきたい：

- Distributions (分布), integral manifolds (積分多様体), Frobenius の定理

幾何学Dでやる予定
(積分論)

- テンソル場
- 微分形式とその積分
- ストークスの定理
- de Rham理論 (微分トポロジーの花形)

多様体上のある種の偏微分方程式(大域)
と
多様体のトポロジーとの関連