幾何学 A 演習問題 No.10 問 113–問 135

対面発表課題は問 119, 問 120, 問 126, 問 127, 問 130, 問 132, 問 133. (対面発表にはしないが, 問 113, 問 114, 問 123, 問 125 は試験に出題する可能性高い)

キーワード: 多様体上の接空間, C^∞ 級写像, 写像の微分

以下, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $M = (M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とする.

問 113. $p \in M$ とする. 接空間 T_pM が $\mathcal{L}(C^\infty(M), \mathbb{R})$ の線型部分空間であることを示せ (講義 Proposition 13.1.2).

問 114. $p \in M$ とする. また $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ を固定する.

(1) 各 $i = 1, \ldots, n$ について

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i}\right)_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \frac{\partial f_{\boldsymbol{u}}}{\partial u_i}(\boldsymbol{u}(p))$$

が well-defined であることを示せ.

(2) 各 $i = 1, \ldots, n$ について

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i}\right)_p \in T_pM$$

となることを示せ (講義 Proposition 13.2.2).

問 115. (試験範囲外) $p \in M$ とする. $\eta \in T_pM$ とし, $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ が p のまわりで等しい (つまり p の M における開近傍 Ω であって, $f_1|_\Omega = f_2|_\Omega$ となるものが存在する) とする. このとき $\eta(f_1) = \eta(f_2)$ となることを示せ (講義 Theorem 13.4.1).

問 116. (試験範囲外) $p \in M$ とし, Ω を M における p の開近傍とする.

(1)

$$r : C^\infty(M) \to C^\infty(\Omega),\ f \mapsto f|_\Omega$$

が $\mathbb{R}$ 代数準同型であることを示せ (講義 Proposition 13.5.1).

(2) 各 $\eta \in T_p\Omega$ について,

$$\tilde{\eta} : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \eta(f|_\Omega)$$

とする. このとき $\tilde{\eta} \in T_pM$ となることを示せ (講義 Proposition 13.5.3).

(3)

$$T_p\Omega \to T_pM,\ \eta \to \tilde{\eta}$$

が線型同型であることを示せ (講義 Theorem 13.5.4).

問 117. (試験範囲外) $p \in M$ とする. また $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ を固定する. このとき $\{(\partial/\partial \boldsymbol{u}_i)_p\}_{i=1,\ldots,n}$ が T_pM の基底であることを示せ (講義 Theorem 13.2.3).

問 118. (試験範囲外) $p \in M$ とする. また $(O, U, \boldsymbol{u}), (O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{A}$ with $p \in O \cap O'$ を固定する.

(1) 各 $i = 1, \ldots, n$ について, $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i \in C^\infty(M)$ であって,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_k}\right)_p (\widetilde{\boldsymbol{v}}_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = k \\ 0 & \text{if } i \neq k \end{cases}$$

となるものが存在することを示せ (講義 Lemma 13.7.1).

(2) Jacobi 行列 $(J\tau_{\boldsymbol{uv}})_{\boldsymbol{u}(p)}$ は T_pM の基底 $\{(\partial/\partial \boldsymbol{v}_i)_p\}_{i=1,\ldots,n}$ から基底 $\{(\partial/\partial \boldsymbol{u}_j)_p\}_{j=1,\ldots,n}$ への変換行列であることを示せ (講義 Theorem 13.3.1).

問 119. (対面発表) 2 次元 C^∞ 級多様体 $S^2 = (S^2, [\mathcal{A}_0])$ について考える (講義 Example 10.2.4 の意味). $p = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \in S^2$ とし,

$$(O, U, \boldsymbol{u}) = (O_3^+, U_3^+, \boldsymbol{u}_3^+) \in \mathcal{A}_0$$
$$(O, U, \boldsymbol{v}) = (O_2^+, U_2^+, \boldsymbol{u}_2^+) \in \mathcal{A}_0$$

とする (講義 Example 13.3.2 の類題).

(1) Jacobi 行列 $(J\tau_{\boldsymbol{uv}})_{\boldsymbol{u}(p)}$ を計算せよ.

(2)

$$\eta = 2\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_1}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_2}\right)_p \in T_pS^2$$

を $\{(\partial/\partial \boldsymbol{v}_i)_p\}_{i=1,2}$ の一次結合で表せ.

問 120. (対面発表) 2 次元 C^∞ 級多様体 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = (\mathbb{R}\mathrm{P}^2, [\mathcal{A}_0])$ について考える (講義 Theorem 12.2.2 の意味). $p = [1:1:1] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ とし,

$$(O, U, \boldsymbol{u}) = (O_3, U_3, \boldsymbol{u}_3) \in \mathcal{A}_0,$$
$$(O, U, \boldsymbol{v}) = (O_2, U_2, \boldsymbol{u}_2) \in \mathcal{A}_0$$

とする.

(1) Jacobi 行列 $(J\tau_{\boldsymbol{uv}})_{\boldsymbol{u}(p)}$ を計算せよ.

(2)

$$\eta = 2\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_1}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_2}\right)_p \in T_p(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$$

を $\{(\partial/\partial \boldsymbol{v}_i)_p\}_{i=1,2}$ の一次結合で表せ.

問 121. (試験範囲外) $i = 1, 2$ について, $M_i = (M_i, \mathcal{A}_i)$ をそれぞれ n_i 次元 C^∞ 級多様体とする.

(1) $\varphi : M_1 \to M_2$ を C^∞ 級写像とする. また Ω を M_1 の開集合, Θ を M_2 の開集合であって, $\varphi(\Omega) \subset \Theta$ となるものとする. このとき

$$\varphi|_\Omega : \Omega \to \Theta,\ x \mapsto \varphi(x)$$

が C^∞ 級写像であることを示せ. ただし Ω, Θ はそれぞれ M_1, M_2 の開部分多様体とみなすこととする (講義 Theorem 14.4.1).

(2) $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{\Theta_\kappa\}_{\kappa\in K}$ をそれぞれ M_1, M_2 の開被覆とする. 写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ (連続性は課さない) について, 以下の三条件が同値であることを示せ (講義 Theorem 14.4.2):

条件 (i) $\varphi : M_1 \to M_2$ は C^∞ 級写像.

条件 (ii) 任意の $\lambda \in \Lambda$, $\kappa \in K$ について,

$$\varphi_{\lambda,\kappa} : \Omega_\lambda \cap \varphi^{-1}(\Theta_\kappa) \to \Theta_\kappa,\ x \mapsto \varphi(x)$$

は C^∞ 級写像.

条件 (iii) 任意の $p \in M_1$ について, $\lambda \in \Lambda$, $\kappa \in K$ であって, $p \in \Omega_\lambda \cap \varphi^{-1}(\Theta_\kappa)$ かつ

$$\varphi_{\lambda,\kappa} : \Omega_\lambda \cap \varphi^{-1}(\Theta_\kappa) \to \Theta_\kappa,\ x \mapsto \varphi(x)$$

が C^∞ 級写像となるものが存在する.

(3) $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}_1$, $(O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{A}_2$ とする．写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ (連続性は課さない) について, 以下の二条件が同値であることを示せ (講義 Lemma 14.4.3):

条件 (i)

$$\varphi_{OO'} : O \cap \varphi^{-1}(O') \to O',\ x \mapsto \varphi(x)$$

が C^∞ 級写像.

条件 (ii)

$$\varphi_{\boldsymbol{uv}} : \boldsymbol{u}(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V,\ u \mapsto \boldsymbol{v}(\varphi(\boldsymbol{u}^{-1}(u)))$$

が C^∞ 級写像 (in the sense of 講義 Section 5).

(4) 写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ (連続性は課さない) について, 以下の三条件が同値であることを示せ (講義 Theorem 14.1.2):

条件 (i)　$\varphi : M_1 \to M_2$ は C^∞ 級写像.

条件 (ii)　任意の $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}_1$, $(O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{A}_2$ について,

$$\varphi_{\boldsymbol{uv}} : \boldsymbol{u}(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V,\ u \mapsto \boldsymbol{v}(\varphi(\boldsymbol{u}^{-1}(u)))$$

が C^∞ 級写像 (in the sense of 講義 Section 5).

条件 (iii)　任意の $p \in M_1$ について, $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}_1$, $(O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{A}_2$ であって, $p \in O \cap \varphi^{-1}(O')$ かつ

$$\varphi_{\boldsymbol{uv}} : \boldsymbol{u}(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V,\ u \mapsto \boldsymbol{v}(\varphi(\boldsymbol{u}^{-1}(u)))$$

が C^∞ 級写像 (in the sense of 講義 Section 5) となるものが存在する.

問 122. $\mathbb{R}$ を講義 Example 10.2.3 の意味で 1 次元 C^∞ 級多様体とみなす．また $M = (M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とする．このとき, 写像 $f : M \to \mathbb{R}$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ:

(1) $f \in C^\infty(M; \mathcal{A})$.

(2) f は M から $\mathbb{R}$ への C^∞ 級写像 (in the sense of 講義 Definition 14.1.1).

問 123. $i = 1, 2$ について, M_i をそれぞれ n_i 次元 C^∞ 級多様体とする．また $\varphi : M_1 \to M_2$ を C^∞ 級写像とする．

(1) 各 $\eta \in T_pM_1$ について, $\eta \circ \varphi^* \in T_{\varphi(p)}M_2$ であることを示せ (講義 Proposition 15.1.1).

(2) φ の p における全微分

$$(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2,\ \eta \to \eta \circ \varphi^*$$

が線型写像であることを示せ (講義 Proposition 15.1.3).

問 124. (試験範囲外) $i = 1, 2$ について, $M_i = (M_i, \mathcal{A}_i)$ をそれぞれ n_i 次元 C^∞ 級多様体とする．また $\varphi : M_1 \to M_2$ を C^∞ 級写像とする．$(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}_1$ with $p \in O$ と, $(O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{A}_2$ with $\varphi(p) \in O'$ を固定する．このとき, 線型写像 $(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_pM_2$ に対して, Jacobi 行列 $(J\varphi_{\boldsymbol{uv}})_{\boldsymbol{u}(p)}$ は座標基底 $\{(\partial/\partial \boldsymbol{u}_j)_p\}_{j=1,\ldots,n_1}$ of T_pM_1, 座標基底 $\{(\partial/\partial \boldsymbol{v}_i)_{\varphi(p)}\}_{i=1,\ldots,n_2}$ of $T_{\varphi(p)}M_2$ についての表現行列であることを示せ.

問 125. $i = 1, 2, 3$ について, $M_i = (M_i, \mathcal{A}_i)$ をそれぞれ n_i 次元 C^∞ 級多様体とする．また $\varphi : M_1 \to M_2$, $\psi : M_2 \to M_3$ をそれぞれ C^∞ 級写像とする．

(1) $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* : C(M_3) \to C(M_1)$ を示せ (講義 Lemma 14.2.2).

(2) $\psi \circ \varphi : M_1 \to M_3$ が C^∞ 級写像であることを示せ (講義 Theorem 14.2.1).

(3) $p \in M_1$ とする．

$$(d(\psi \circ \varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p : T_p M_1 \to T_{(\psi\circ\varphi)(p)} M_3$$

となることを示せ (講義 Theorem 15.3.1).

問 126. (対面発表) $M = (M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とする．

(1) このとき恒等写像

$$\mathrm{id}_M : M \to M,\ x \mapsto x$$

は $(M, \mathcal{A})$ から $(M, \mathcal{A})$ への C^∞ 級写像になることを示せ (講義 Example 14.1.4).

(2) $p \in M$ について, 恒等写像 id_M の p における全微分 $(d\,\mathrm{id}_M)_p$ は $T_p M$ 上の恒等写像であることを示せ (講義 Example 15.1.4).

問 127. (対面発表) $i = 1, 2$ について, M_i をそれぞれ n_i 次元 C^∞ 級多様体とする．また $\varphi : M_1 \to M_2$ を微分同相写像とする．このとき各 $p \in M_1$ について, $(d\varphi)_p : T_p M_1 \to T_{\varphi(p)} M_2$ は線型同型写像であることを示せ.

問 128. (試験範囲外) $i = 1, 2$ について, M_i をそれぞれ n_i 次元 C^∞ 級多様体とする．

(1) $p \in M_1$ とし, $\varphi : M_1 \to M_2$ を C^∞ 級写像とする．以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (i) φ が p のまわりで局所微分同相.

条件 (ii) $(d\varphi)_p : T_p M_1 \to T_{\varphi(p)} M_2$ が線型同型.

(講義 Theorem 15.4.2)

(2) $\varphi : M_1 \to M_2$ を全単射 C^∞ 級写像とする．以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (i) φ は微分同相.

条件 (ii) 任意の $p \in M_1$ において, $(d\varphi)_p : T_p M_1 \to T_{\varphi(p)} M_2$ が線型同型.

(講義 Corollary 15.4.4)

問 129. 連続写像

$$\varphi : S^2 \to S^2,\ x \mapsto (-x_1, x_2, x_3)$$

について考える．

(1) $\varphi : S^2 \to S^2$ が C^∞ 写像であることを示せ.

(2) $p \in (1, 0, 0) \in S^2$ とする．このとき $(d\varphi)_p$ の階数を求めよ.

問 130. (対面発表) 連続写像

$$\varphi : S^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2,\ x \mapsto [x] = [x_1 : x_2 : x_3]$$

について考える．

(1) $\varphi : S^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ が C^∞ 写像であることを示せ (講義 Example 14.1.3).

(2) $p \in (1, 0, 0) \in S^2$ とする．このとき $(d\varphi)_p$ の階数を求めよ (講義 Example 15.2.2).

問 131. 写像

$$\varphi : \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2,\ [x_1 : x_2] \mapsto [x_1 : x_2 : 0]$$

について考える．

(1) φ が well-defined であることを確認せよ．また φ が連続であることを示せ.

(2) $\varphi : \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ が C^∞ 写像であることを示せ.

(3) $p \in [1 : 0] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ とする．このとき $(d\varphi)_p$ の階数を求めよ.

問 132. (対面発表) C^∞ 級写像

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{i=1}^{3} x_i^2$$

について考える. $\mathrm{rank}(d\varphi)_p = 0$ となるような $p \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ.

問 133. (対面発表) C^∞ 級写像

$$\varphi : S^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_3$$

について考える. $\mathrm{rank}(d\varphi)_p = 0$ となるような $p \in S^2$ をすべて求めよ.

問 134. (試験範囲外)

$$\varphi : S^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1,\ (\cos\theta, \sin\theta) \mapsto [\cos(\theta/2) : \sin(\theta/2)]$$

が well-defined であることを示せ. また φ は微分同相であることを示せ (注: $n \geq 2$ のときは S^n と $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ の間に同相写像はありません).

問 135. (試験範囲外) $M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^3\} \subset \mathbb{R}^2$ とし, 講義 Example 10.2.4 の 1 次元 C^inftY 級多様体 $(M, [\mathcal{A}_0])$, $(M, [\mathcal{B}_0])$ を考える. ただし

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &:= \{(M, \mathbb{R}, \boldsymbol{u} : M \to \mathbb{R}, x \mapsto x_1)\}, \\
\mathcal{B}_0 &:= \{(M, \mathbb{R}, \boldsymbol{v} : M \to \mathbb{R}, x \mapsto x_2)\}
\end{aligned}$$

としている.

(1) 恒等写像 $\mathrm{id}_M : M \to M$ について, id_M は $(M, [\mathcal{A}_0])$ から $(M, [\mathcal{B}_0])$ への C^∞ 級写像であることを示せ.

(2) 恒等写像 $\mathrm{id}_M : M \to M$ について, id_M は $(M, [\mathcal{B}_0])$ から $(M, [\mathcal{A}_0])$ への C^∞ 級写像ではないことを示せ.

(3)

$$\varphi : M \to M,\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1^{1/3}, x_1)$$

は well-defined であることを示せ. また φ が微分同相写像であることを示せ.