

幾何学 A 演習問題 No.11 問 136-問 140

対面発表課題は問 137, 問 139.

キーワード: 正則部分多様体

以下, ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  は 講義 Example 10.2.3 の意味で  $n$  次元  $C^\infty$  級多様体とみなす.

問 136. (試験範囲外) 「開部分多様体は正則部分多様体である」を定式化し, 証明せよ (講義 Example 16.1.2).

問 137. (対面発表)  $(S^n, [\mathcal{A}_0])$  (講義 Example 10.2.3) は  $\mathbb{R}^{n+1}$  の正則部分多様体であることを示せ (講義 Example 16.1.3).

問 138.  $M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^3\} \subset \mathbb{R}^2$  とし, 講義 Example 10.2.4 の 1 次元  $C^\infty$  級多様体  $(M, [\mathcal{A}_0]), (M, [\mathcal{B}_0])$  を考える. ただし

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &:= \{(M, \mathbb{R}, \mathbf{u} : M \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_1)\}, \\ \mathcal{B}_0 &:= \{(M, \mathbb{R}, \mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_2)\}\end{aligned}$$

としている.

(1)  $(M, [\mathcal{A}_0])$  は  $\mathbb{R}^2$  の 1 次元正則部分多様体であることを示せ.

(2)  $(M, [\mathcal{B}_0])$  は  $\mathbb{R}^2$  の 1 次元正則部分多様体でないことを示せ.

問 139. (対面発表)  $C^\infty$  級写像

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{i=1}^3 x_i^2$$

について考える (講義 Example 16.2.3 の一般化).

(1)  $\varphi$  の正則値をすべて求めよ.

(2) 各  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  について  $S^2(r) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 x_i^2 = r^2\}$  が  $\mathbb{R}^3$  の正則部分多様体であることを示せ.

(3) 各  $r \in \mathbb{R}_{>0}, p \in S^2(r)$  について,

$$T_p S^2(r) = \left\{ \sum_{i=1}^3 a_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \mid p \perp \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\}$$

となることを示せ.

問 140. (試験範囲外)  $C^\infty$  級写像

$$\varphi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_3$$

について考える (講義 Example 16.2.4 の一般化).

(1)  $\varphi$  の正則値をすべて求めよ.

(2) 各  $h \in (-1, 1)$  について  $S_h := \{x \in S^2 \mid x_3 = h\}$  が  $S^2$  の正則部分多様体であることを示せ.

(3) 各  $h \in (-1, 1), p \in S_h$  について,

$$T_p S_h = \left\{ \sum_{i=1}^3 a_i \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \mid p \perp \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, a_3 = 0 \right\}$$

となることを示せ.