幾何学 A 演習問題 No.2 問 15–問 27

対面発表は問 21, 問 25, 問 26.

キーワード: $\mathbb{R}^n$ の開集合上の C^∞ 級関数

以下 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U を $\mathbb{R}^n$ の空でない開集合とする.

問 15. (解析の復習) U 上の C^1 級関数は全微分可能であることを示せ.

問 16. (解析の復習) U 上の全微分可能な関数は連続であることを示せ.

問 17. (解析の復習) $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. U 上の C^k 級関数は U 上 C^{k-1} 級でもあることを示せ (講義:Proposition 3.1.3).

問 18. (解析の復習) $k \geq 1$ とし, $i = 1, \ldots, n$ とする. 各 $f, g \in C^k(U)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ について, 以下が成り立つことをそれぞれ示せ (講義: Proposition 3.3.4).

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial x_i}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\lambda f)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}. \tag{3}$$

問 19. (解析の復習) n 変数多項式関数が $\mathbb{R}^n$ 上 C^∞ 級であることを示せ (講義: Proposition 3.2.1).

問 20. (やや難: 解析の復習) α を実数とする.

(1) 正の実数 t について, 実数 t^α の定義を述べ, その定義が well-defined であることを示せ (Hint: まず α が整数の場合の定義を述べ, 次に α が有利数の場合の定義を述べよ. 最後に α が一般の実数の場合には極限の形で t^α を定義せよ).

(2) 関数

$$\phi_\alpha : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t^\alpha$$

が $\mathbb{R}_{>0}$ 上 C^∞ 級であることを示せ (講義:Proposition 3.2.2).

問 21. (対面発表; 解析の復習) V を $\mathbb{R}$ の空でない開集合とする. また $g : U \to \mathbb{R}$ を U 上の関数, $h : V \to \mathbb{R}$ を V 上の関数としたとき,

$$h \circ g : U \cap g^{-1}(V) \to \mathbb{R},\ x \mapsto h(g(x))$$

と定める. また各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について, 以下の命題 P_k を考える.

命題 P_k: $g : U \to \mathbb{R}$, $h : V \to \mathbb{R}$ がともに C^k 級であるとする. このとき関数 $h \circ g$ は $U \cap g^{-1}(V)$ 上 C^k 級である.

(1) $p \in g^{-1}(V)$ を固定する. $g : U \to \mathbb{R}$ が p において偏微分可能であり, $h : V \to \mathbb{R}$ が $g(p)$ において微分可能であるとする. このとき $h \circ g$ は p 上偏微分微分可能であることを示せ. また $h \circ g$ の p における偏微分係数を, g の p における偏微分係数と h の $g(p)$ における微分係数を用いて表せ (連鎖律).

(2) 各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について命題 P_k が真であることを示せ.

(3) $g : U \to \mathbb{R}$, $h : V \to \mathbb{R}$ がともに C^∞ 級であるとする. このとき $h \circ g$ は $U \cap g^{-1}(V)$ 上 C^∞ 級であることを示せ (講義:Proposition 3.2.3).

問 22. 変数 t についての実多項式 $P(t)$ について,

$$f_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} P(\frac{1}{x})e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 \quad (x \leq 0) \end{cases}$$

とおく.

(1) 任意の多項式 $P(t)$ について, f_P が $\mathbb{R}$ 上連続であることを示せ.

(2) 任意の多項式 $P(t)$ について, f_P が $\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級であることを示せ (講義:Example 3.2.5 の一般化).

(3) (重要度: 低) 以下の関数が $x=0$ においてテイラー展開不可能であることを示せ:

$$\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

問 23. $p \in \mathbb{R}^n$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ with $0 < r_1 < r_2$ とする. このとき $\mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 級関数

$$b = b_{p,r_1,r_2} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

であって, 以下の二条件を満たすものが存在することを示せ (講義:Theorem 3.2.6):

条件 (i)　$b(x) = 1$ for any $x \in \mathbb{R}^n$ with $\|x - p\| \leq r_1$.

条件 (ii)　$b(x) = 0$ for any $x \in \mathbb{R}^n$ with $\|x - p\| \geq r_2$.

問 24. $p \in U$ とし, $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ with $0 < r_1 < r_2 < r_3$ and $\mathcal{U}_{r_3}(p) \subset U$ とする. ただし $\mathcal{U}_{r_3}(p)$ は p の r_3 開近傍 (in $\mathbb{R}^n$) とする. また $b_{p,r_1,r_2} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ を上の問題の二条件を満たす $\mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 級関数として固定しておく. ここで各 $f \in C^\infty(U)$ について,

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f(x) \cdot b_{p,r_1,r_2}(x) & (\text{if } x \in U), \\ 0 & (\text{if } x \notin U) \end{cases}$$

と定める. このとき任意の $f \in C^\infty(U)$ について, 以下が成り立つことをそれぞれ示せ:

(1) $\tilde{f}$ は $\mathbb{R}^n$ 上 C^∞ 級である.

(2) 任意の $i = 1, \ldots, n$ について, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(p)$.

問 25. (対面発表) $C^k(U)$ は $C(U)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数であることを示せ (講義: Theorem 3.3.2).

問 26. (対面発表) $C^\infty(U)$ は $C(U)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数であることを示せ (講義: Corollary 3.3.3).

問 27. (重要度: 低) $n \geq 1$ とする. このとき $C^\infty(U)$ はベクトル空間として無限次元であることを示せ (講義: Proposition 3.3.6).