

幾何学 A 演習問題 No.7 問 82-問 88

対面発表課題は問 83, 問 84, 問 85, 問 86, 問 87.

キーワード: 極大 C^∞ -atlas

問 82. (証明は試験には出さない) M を位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. また $\mathcal{A}_0 \in C^\infty\text{-atlas}(M; \mathbb{R}^n)$ とする.

- (1) $\mathcal{A}_0 \subset [\mathcal{A}_0]$ を示せ.
- (2) $[\mathcal{A}_0] \in C^\infty\text{-atlas}(M; \mathbb{R}^n)$ を示せ.
- (3) $[\mathcal{A}_0] \in C^\infty\text{-atlas}(M; \mathbb{R}^n)$ が極大であることを示せ.
- (4) $\mathcal{B}_0 \in C^\infty\text{-atlas}(M; \mathbb{R}^n)$ with $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}_0$ について $\mathcal{B}_0 \subset [\mathcal{A}_0]$ となることを示せ.
- (5) $[\mathcal{A}_0]$ は \mathcal{A}_0 を含むただ一つの n 次元極大 C^∞ -atlas であることを示せ.
(講義 Theorem 9.1.6).

問 83. (対面発表) M を位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

- (1) $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}'_0 \in C^\infty\text{-atlas}(M; \mathbb{R}^n)$ with $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}'_0$ とする. このとき,

$$C^\infty(M; \mathcal{A}_0) = C^\infty(M; \mathcal{A}'_0)$$

となることを示せ (講義 Theorem 9.1.2).

- (2) 各 $\mathcal{A}_0 \in C^\infty\text{-atlas}(M; \mathbb{R}^n)$ について,

$$C^\infty(M; \mathcal{A}_0) = C^\infty(M; [\mathcal{A}_0])$$

となることを示せ (講義 Proposition 9.1.7).

問 84. (対面発表) M を位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0 \in C^\infty\text{-atlas}(M; \mathbb{R}^n)$ について以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (i) $[\mathcal{A}_0] = [\mathcal{B}_0]$.

条件 (ii) 任意の $(O, U, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}_0, (O', V, \mathbf{v}) \in \mathcal{B}_0$ について, 座標変換 $\tau_{\mathbf{u}\mathbf{v}}, \tau_{\mathbf{v}\mathbf{u}}$ は共に C^∞ 級写像.

設定 (問 85 から問 88 まで): $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし,

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

とおく. また $(O_N, V_N, \mathbf{v}_N), (O_S, V_S, \mathbf{v}_S)$ を以下のように定める.

$$O_N := \{x \in S^n \mid x \neq (0, \dots, 0, 1)\} \subset S^n, \quad O_S := \{x \in S^n \mid x \neq (0, \dots, 0, -1)\} \subset S^n,$$

$$V_N = V_S = \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbf{v}_N : O_N \rightarrow V_N, \quad x \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right), \quad \mathbf{v}_S : O_S \rightarrow V_S, \quad x \mapsto \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}} \right).$$

さらに $\mathcal{B}_0 := \{(O_N, V_N, \mathbf{v}_N), (O_S, V_S, \mathbf{v}_S)\}$ とおく.

問 85. (対面発表) $(O_N, V_N, \mathbf{v}_N), (O_S, V_S, \mathbf{v}_S) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ となることを示せ. また $\mathbf{v}_N, \mathbf{v}_S$ の逆写像もそれぞれ求めよ.

問 86. (対面発表) \mathcal{B}_0 が S^n の C^∞ -atlas であることを示せ (講義 Example 9.1.9 の一部分).

問 87. (対面発表) $n = 2$ の場合を考える. $(O, U, \mathbf{u}) = (O_3^+, U_3^+, \mathbf{u}_3^+)$ (演習問題 No.6 問 80-81 の設定で定めたもの), $(O', V, \mathbf{v}) = (O_S, V_S, \mathbf{v}_S)$ とおく. 座標変換 $\tau_{\mathbf{u}\mathbf{v}} : \mathbf{u}(O \cap O') \rightarrow \mathbf{v}(O \cap O')$ を求めよ (定義域, 値域も明示的に求めること).

問 88. 一般の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ について考える. \mathcal{A}_0 を演習問題 No.5 問 79-80 の設定で定めた S^n の C^∞ -atlas とする. このとき $[\mathcal{A}_0] = [\mathcal{B}_0]$ を示せ.