幾何学 A 演習問題 No.8 問 89–問 95
対面発表課題はなし.

キーワード: C^∞ 級多様体

問 89. (位相空間論の復習) ハウスドルフ位相空間のコンパクト部分集合は閉集合であることを示せ.

問 90. (位相空間論の復習) ハウスドルフ位相空間の部分空間 (部分集合に相対位相を定めたもの) はハウスドルフ位相空間であることを示せ.

問 91. (試験範囲外) M を位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $\mathcal{A}$ を M 上の極大 n 次元 C^∞-atlas とする. $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}$, M の開集合 Ω について,

$$(O \cap \Omega, \boldsymbol{u}(O \cap \Omega), \boldsymbol{u}|_{O\cap\Omega} : O \cap \Omega \to \boldsymbol{u}(O \cap \Omega)) \in \mathcal{A}$$

となることを示せ (講義 Lemma 10.5.1).

問 92. (試験範囲外) M を位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $\mathcal{A}$ を M 上の極大 n 次元 C^∞-atlas とする. また Ω を M の開集合とする. このとき

$$\mathcal{A}_\Omega := \{(O \cap \Omega, \boldsymbol{u}(O \cap \Omega), \boldsymbol{u}|_{O\cap\Omega} : O \cap \Omega \to \boldsymbol{u}(O \cap \Omega)) \mid (O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}\}$$

とおくと, $\mathcal{A}_\Omega$ は Ω の極大 n 次元 C^∞-atlas であることを示せ. また $(M, \mathcal{A})$ が n 次元 C^∞ 級多様体であるとき, $(\Omega, \mathcal{A}_\Omega)$ は n 次元 C^∞ 級多様体であることを示せ (講義 Theorem 10.3.1).

問 93. (試験範囲外) M を位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $\mathcal{A}$ を M 上の極大 n 次元 C^∞-atlas とする. また $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Omega}$ を M の開被覆とする. 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ (連続性は課さない) について, 以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (i)　$f \in C^\infty(M; \mathcal{A})$.

条件 (ii)　任意の $\lambda \in \Lambda$ について, $f|_{\Omega_\lambda} \in C^\infty(\Omega_\lambda; \mathcal{A}_{\Omega_\lambda})$.

(講義 Theorem 10.3.3 の一般化).

問 94. (試験には出さない) $M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ とおく. このとき M の 1 次元局所座標系 $(O, U, \boldsymbol{u})$ であって, $(0, 0) \in O$ となるものが存在しないことを示せ. また C^∞-atlas$(M, \mathbb{R}^1) = \emptyset$ であることを示せ.

問 95. (試験には出さない) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. n 次元 C^∞ 級多様体 $(M, \mathcal{A})$ について考える.

(1) $\{O\}_{(O,U,\boldsymbol{u})\in\mathcal{A}}$ は M の開基であることを示せ.

(2) M は局所コンパクトであることを示せ.

(3) M が連結であることと, M が弧状連結であることは同値であることを示せ.