幾何学 A 演習問題 No.9 問 96–問 111

対面発表課題は問 103, 問 105, 問 106, 問 107, 問 108.

キーワード: 直積多様体 (試験範囲外), 射影空間

問 96. (試験範囲外) $i=1,2$ について, $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U_i を $\mathbb{R}^{n_i}$ の開集合とする. $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ を $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ と同一視し, $U_1 \times U_2$ を $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ の部分集合とみなす.

(1) $U_1 \times U_2$ が $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ の開集合であることを示せ.

(2) $i=1,2$ について, $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, V_i を $\mathbb{R}^{m_i}$ の開集合とする. φ_i を U_i から V_i への C^∞ 級写像とする. このとき

$$\varphi_1 \times \varphi_2 : U_1 \times U_2 \to V_1 \times V_2,\ (u, u') \mapsto (\varphi_1(u), \varphi_2(u'))$$

は C^∞ 級写像であることを示せ.

問 97. (試験範囲外) $i=1,2$ について, $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, M_i を位相空間とする. また $M_1 \times M_2$ を直積位相空間とする.

(1) 各 $(O_1, U_1, \boldsymbol{u}_1) \in \mathcal{LC}(M_1; \mathbb{R}^{n_1})$, $(O_2, U_2, \boldsymbol{u}_2) \in \mathcal{LC}(M_2; \mathbb{R}^{n_2})$ について,

$$(O_1 \times O_2, U_1 \times U_2, \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2 : O_1 \times O_2 \to U_1 \times U_2, (x, y) \mapsto (\boldsymbol{u}_1(x),_2(y)))$$

は $\mathcal{LC}(M_1 \times M_2; \mathbb{R}^{n_1+n_2})$ の元 (i.e. $M_1 \times M_2$ 上の n_1+n_2 次元局所座標系) であることを示せ (ただし $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ を $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ と同一視した).

(2) 各 $\mathcal{A}^1 \in C^\infty\text{-atlas}(M_1; \mathbb{R}^{n_1})$, $\mathcal{A}^2 \in C^\infty\text{-atlas}(M_2; \mathbb{R}^{n_1})$ について,

$$\Upsilon(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2) := \{(O_1 \times O_2, U_1 \times U_2, \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2) \mid (O_i, U_i, \boldsymbol{u}_i) \in \mathcal{A}^i\ (i=1,2)\}$$

は $C^\infty\text{-atlas}(M_1 \times M_2; \mathbb{R}^{n_1+n_2})$ の元 (i.e. $M_1 \times M_2$ 上の n_1+n_2 次元 C^∞-atlas) であることを示せ.

(3) $\mathcal{A}^i, \mathcal{B}^i \in C^\infty\text{-atlas}(M_i; \mathbb{R}^{n_i})$ が $\mathcal{A}^i \subset \mathcal{B}^i$ を満たすとする $(i=1,2)$. このとき

$$\Upsilon(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2) \subset \Upsilon(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2)$$

となることを示せ.

(4) $\mathcal{A}^i_0, \mathcal{A}^i \in C^\infty\text{-atlas}(M_i; \mathbb{R}^{n_i})$ が $\mathcal{A}^i = [\mathcal{A}^i_0]$ を満たすとする $(i=1,2)$. このとき,

$$[\Upsilon(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2)] = [\Upsilon(\mathcal{A}^1_0, \mathcal{A}^2_0)]$$

となることを示せ.

(5) $M_1 = M_2 = \mathbb{R}$ とし, また極大 1 次元 C^∞-atlas $\mathcal{A}^1 = \mathcal{A}^2 = [\{(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})\}]$ について考える. このとき $\Upsilon(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2)$ は $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上の 2 次元 C^∞-atlas として極大ではないことを示せ.

(講義 Proposition 11.1.1, Theorem 11.1.2, Proposition 11.1.3, Corollary 11.1.4).

問 98. (試験範囲外) $i=1,2$ について, $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $(M_i, \mathcal{A}^i)$ を n_i 次元 C^∞ 級多様体とする. このとき $(M_1 \times M_2, [\Upsilon(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2)])$ が (n_1+n_2) 次元 C^∞ 級多様体であることを示せ (これを $(M_1, \mathcal{A}^1)$, $(M_2, \mathcal{A}^2)$ の直積多様体という; 講義 Theorem 11.2.1).

問 99. (試験範囲外) $i=1,2$ について, $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U_i を $\mathbb{R}^{n_i}$ の開集合とする. $U_1 \times U_2$ を $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ の開集合とみなし, U_1, U_2, $U_1 \times U_2$ をそれぞれ講義 Example 10.2.3 の意味で C^∞ 級多様体とみなす. このとき, $U_1 \times U_2$ は U_1 と U_2 の直積多様体であることを示せ.

問 100. (試験範囲外) $i=1,2$ について, M_i を C^∞ 級多様体とする. M_1 と M_2 の直積多様体を単に $M_1 \times M_2$ と書くことにする. $f_i \in C^\infty(M_i)$ $(i=1,2)$ について, $f_1 \otimes f_2 \in C^\infty(M_1 \times M_2)$ となることを示せ. ただし

$$f_1 \otimes f_2 : M_1 \times M_2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f_1(x) \cdot f_2(y)$$

とする.

問 101. (位相空間論の復習; 商位相) $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, Y を集合とし, $\pi : X \to Y$ を全射写像とする. このとき

$$\mathcal{O}_X^\pi := \{O \subset Y \mid \pi^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}$$

は Y 上の位相を定めることを示せ (Y の π による商位相とよぶ).

問 102. (位相空間論の復習; 試験範囲外) 上の問題の設定において, $\pi : X \to Y$ が開写像であるとする. このとき以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (i): Y はハウスドルフ.

条件 (ii): $\{(x_1, x_2) \in X \times X \mid \pi(x_1) = \pi(x_2)\}$ は直積空間 $X \times X$ の閉集合.

(講義 Proposition 12.3.2).

問 103. (対面発表) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n,\ x \mapsto \mathbb{R}x\ (=: [x] = [x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}])$$

が写像として well-defined であり, さらに全射であることを示せ (講義 Proposition 12.1.2).

以降, $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ には $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分空間としての相対位相が定まっており, $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ には π による商位相が定まっているものとする.

問 104. $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ:

(i) $[x] = [y]$.

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ であって, $x = \lambda y$ となるものが存在する.

問 105. (対面発表) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. W を $\mathbb{R}^{n+1}$ の線型部分空間であるとする:

(1) W が $\mathbb{R}^{n+1}$ の閉集合であることを示せ (線形代数と位相空間論の復習).

(2) $O_W := \{\ell \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \mid \ell \not\subset W\}$ は $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ の開集合であることを示せ (講義 Proposition 12.1.4).

問 106. (対面発表) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. また各 $i = 1, \ldots, n+1$ について,

$$W_i := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i = 0\}$$

とおく. また各 i について, $O_i = O_{W_i}$, $U_i = \mathbb{R}^n$,

$$\boldsymbol{u}_i : O_i \to U_i,\ [x] \mapsto \frac{1}{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{n+1}) \quad (x \in \pi^{-1}(O_i))$$

と定める.

(1) 各 i について, $\boldsymbol{u}_i$ が写像として well-defined であることを示せ.

(2) 各 i について, $\boldsymbol{u}_i$ の逆写像を構成せよ.

(3) 各 i について, $\boldsymbol{u}_i$ が同相写像であることを示せ.

(4) 各 i について, $(O_i, U_i, \boldsymbol{u}_i)$ が $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 上の n 次元局所座標系であることを示せ.

(講義 Theorem 12.2.1).

問 107. (対面発表) 上の問題の設定において,

$$\mathcal{A}_0 := \{(O_i, U_i, \boldsymbol{u}_i) \mid i = 1, \dots, n+1\} \subset \mathcal{LC}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{R}^n)$$

とおく. このとき $\mathcal{A}_0$ が $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ 上の n 次元 C^∞-atlas となることを示せ (講義 Theorem 12.2.2).

問 108. (対面発表) 注意: この問題では講義 Theorem 12.2.3 は用いてはならないこととする (意義としては Theorem 12.2.3 の証明の雰囲気をつかむための問題): $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ 上の関数 f を

$$f : \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}, [x_1 : x_2] \mapsto \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

と定める.

(1) f が well-defined であることを示せ.

(2) $f \in C^\infty(\mathbb{R}\mathrm{P}^1)$ を示せ.

(講義 Example 12.2.4 の簡単版)

問 109. (位相空間論の復習; 試験範囲外) 「連続写像によるコンパクト集合の像はコンパクト」を定式化し, 証明せよ.

問 110. (試験範囲外) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. $\pi(S^n) = \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ を示せ. また $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ がコンパクトであることを示せ (講義 Proposition 12.3.1, Theorem 12.1.5 の前半).

問 111. (試験範囲外) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

(1) $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ は開写像であることを示せ.

(2)

$$\{(x, y) \in (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \mid \pi(x) = \pi(y)\}$$

は $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ において閉集合であることを示せ.

(3) $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ がハウスドルフであることを示せ.

(講義 Lemma 12.3.3, Lemma 12.3.4, Theorem 12.1.5 の後半)