幾何学 A 期末試験 問 1–16 130 点満点

注意点: 持ち込み可です. 持ち込んだ紙資料および, PC やスマホを見たりネット検索しても構いません. ただし持ち込み資料を他受験者と共有したり, 他人とチャットや掲示板などでリアルタイムで連絡を取る行為は禁止します.

キーワード: C^∞ 級多様体, C^∞ 級関数のなす $\mathbb{R}$-代数, 接空間, C^∞ 級写像, 正則部分多様体

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ (30 点満点)

問 1. (10 点) $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U, U_1, U_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}$ の開集合とする. 以下の主張のうち「意味が通っていて, なおかつ主張内容が正しい」ものをすべて挙げよ (理由, 説明, 証明などは不要):

主張 A: $f \in C^\infty(U)$, $p \in U$ について, $f(p) \in \mathbb{R}$.

主張 B: $p \in U$, $\eta \in T_pU$, $f \in C^\infty(U)$ について, $\eta(f) \in \mathbb{R}$.

主張 C: 連続写像 $\varphi : U_1 \to U_2$, $f \in C(U_2)$, $p \in U_1$ について, $\varphi^*(f) \in C(U_1)$ かつ $(\varphi^*(f))(p) \in \mathbb{R}$.

主張 D: C^∞ 級写像 $\varphi : U_1 \to U_2$, $p \in U_1$, $f \in C^\infty(U_1)$ について, $(d\varphi)_p(f) \in T_{\varphi(p)}U_2$.

主張 E: C^∞ 級写像 $\varphi : U_1 \to U_2$, $p \in U_1$, $\eta \in T_pU_1$, $f \in C^\infty(U_2)$ について, $((d\varphi)_p(\eta))(f) \in \mathbb{R}$.

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問 2. (5 点) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $M = (M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とする. また $M = (M, \mathcal{A})$ 上の C^∞ 級関数全体のなす集合を $C^\infty(M)$ のように書くことにする. 以下の主張のうち「意味が通っていて, なおかつ主張内容が正しい」ものをすべて挙げよ (理由, 説明, 証明などは不要):

主張 F: $f, g \in C^\infty(M)$ について, $f \cdot g \in C^\infty(M)$.

主張 G: 各 $(O, U, \boldsymbol{u}), (O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{A}$, $p \in O$ について, $\tau_{\boldsymbol{uv}}(p) \in O'$. ただし $\tau_{\boldsymbol{uv}}$ は $(O, U, \boldsymbol{u})$ から $(O', V, \boldsymbol{v})$ への座標変換とする.

主張 H: 各 $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}$, $p \in O$, $i = 1, \ldots, n$ について,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i}\right)_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \frac{\partial f_{\boldsymbol{u}}}{\partial u_i}(\boldsymbol{u}(p))$$

と定めると,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i}\right)_p \in T_pM.$$

また,

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i}\right)_p\right\}_{i=1,\ldots,n}$$

は T_pM の基底となる.

問 3. (5 点) $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $M_1 = (M_1, \mathcal{A}_1)$, $M_2 = (M_2, \mathcal{A}_2)$, $M_3 = (M_3, \mathcal{A}_3)$ をそれぞれ n_1, n_2, n_3 次元 C^∞ 級多様体とする. またそれぞれの多様体上の C^∞ 級関数全体のなす集合を $C^\infty(M_1)$, $C^\infty(M_2)$, $C^\infty(M_3)$ のように書くことにする. 以下の主張のうち「意味が通っていて, なおかつ主張内容が正しい」ものをすべて挙げよ (理由, 説明, 証明などは不要):

主張 I: C^∞ 級写像 $\varphi : M_1 \to M_2$, $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}_1$, $(O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{A}_2$ について,

$$\varphi_{\boldsymbol{uv}} : \boldsymbol{u}(O \cap O') \to V,\ u \mapsto \boldsymbol{v}(\varphi(\boldsymbol{u}^{-1}(u)))$$

と定めると, $\varphi_{\boldsymbol{uv}}$ は C^∞ 級写像.

主張 J: $\varphi : M_1 \to M_2$, $\psi : M_2 \to M_3$ が C^∞ 級写像であるとき, 合成写像 $\psi \circ \varphi : M_1 \to M_3$ は C^∞ 級写像である. また $p \in M_1$ とするとき, T_pM_1 から $T_{(\psi\circ\varphi)(p)}M_3$ への線型写像として

$$(d(\psi \circ \varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p.$$

主張 K: $\varphi : M_1 \to M_2$ が全単射 C^∞ 級写像であるとしても, 逆写像 $\varphi^{-1} : M_2 \to M_1$ は C^∞ 級写像であるとは限らない.

学籍番号：____________________ 氏名：____________________

問 4. (10 点) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $M = (M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とする．また M 上の C^∞ 級関数全体のなす集合を単に $C^\infty(M)$ のように書くことにする．以下の命題は一般には真ではない, 反例を挙げよ:
<u>命題</u>: $p \in M$, $\eta_1, \eta_2 \in T_pM$ について, $\eta_1 \cdot \eta_2 \in T_pM$. ただし,

$$\eta_1 \cdot \eta_2 : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \eta_1(f) \cdot \eta_2(f)$$

とおく (Hint: $M = \mathbb{R}$, $p = 0$, $\eta = (d/dx)_p \in T_pM$ について, $\eta \cdot \eta : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ が線型でないことを具体的な例を挙げて証明すればよい).

$\boxed{2}$ (25 点満点)

以下, $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U, U_1, U_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}$ の開集合とする．また, $M = (M, \mathcal{A})$, $M_1 = (M_1, \mathcal{A}_1)$, $M_2 = (M_2, \mathcal{A}_2)$ をそれぞれ n, n_1, n_2 次元 C^∞ 級多様体とする．それぞれの多様体上の C^∞ 級関数全体のなす $\mathbb{R}$ 代数を単に $C^\infty(M)$, $C^\infty(M_1)$, $C^\infty(M_2)$ のように書くことにする．

問 5 – 問 9 で紹介する定義達について, 修正の必要がある場合はそれぞれ正しく修正したものを述べよ (修正版を書いたうえで, 修正した箇所に印または説明をつけること)．また修正の必要がない場合には「修正の必要なし」とせよ (講義と同じ意味の定義を違う言い回しで紹介している場合もあるので注意せよ)．

問 5. (5 点) 写像 $\Psi : C(U_2) \to C(U_1)$ が線型であるとは, 任意の $f \in C(U_2)$, $x, y \in U_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ について

- $(\Psi(f))(x + y) = (\Psi(f))(x) + (\Psi(f))(y)$ および
- $(\Psi(f))(\lambda x) = \lambda(\Psi(f))(x)$

が成り立つこと．

問 6. (5 点) M を位相空間とする．$(O, U, \boldsymbol{u})$ が M の n 次元局所座標系であるとは, 以下を満たすこと:

- O は M の部分集合,
- U は $\mathbb{R}^n$ の部分集合,
- $\boldsymbol{u} : O \to U$ は同相写像
  (ただし O, U にはそれぞれ M, $\mathbb{R}^n$ の部分集合としての相対位相を定める)．

問 7. (5 点) M 上の連続関数 $f \in C(M)$ が, 極大 C^∞-atlas $\mathcal{A}$ 上 C^∞ 級であるとは, 任意の $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}$ について,

$$f_{\boldsymbol{u}} := (\boldsymbol{u}^{-1})^*(f|_O) \in C^\infty(U)$$

となること．

学籍番号：________________________　氏名：________________________

問 8. (5 点) 連続写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ が C^∞ 級写像であるとは, 任意の $f \in C^\infty(M_1)$ について, $\varphi^*(f) \in C^\infty(M_2)$ となること.

問 9. (5 点) M の部分集合 S を固定し, M の部分集合としての相対位相を定める. $0 \leq k \leq n$ となる整数 k を固定し, S 上の k 次元極大 C^∞-atlas $\mathcal{A}_S$ を固定する. このとき, $(S, \mathcal{A}_S)$ が $M = (M, \mathcal{A})$ の k 次元正則部分多様体であるとは, 包含写像

$$\iota : S \to M,\ x \mapsto x$$

が $(S, \mathcal{A}_S)$ から $(M, \mathcal{A})$ への C^∞ 級写像となることである.

$\boxed{3}$ (20 点満点)

問 10. (10 点) $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U_1, U_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}$ の開集合とする. $p \in U_1$, $\eta_1, \eta_2 \in T_pU_1$ とし, C^∞ 級写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ を固定する. このとき等式

$$(d\varphi)_p(\eta_1 + \eta_2) = (d\varphi)_p(\eta_1) + (d\varphi)_p(\eta_2)$$

の証明として, 以下の議論には数か所の不備がある. 適切に修正したものを述べよ (修正版を書いたうえで, 議論の不備がある箇所に印または説明をつけること).

議論: $f \in C^\infty(U_2)$ を任意にとる. 以下を示せばよい:

$$\boxed{\text{示すこと}}\,((d\varphi)_p(\eta_1 + \eta_2))(f) = ((d\varphi)_p(\eta_1) + (d\varphi)_p(\eta_2))(f).$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= ((d\varphi)_p(\eta_1 + \eta_2))(f) \\
&= ((\eta_1 + \eta_2) \circ \varphi^*)(f) \quad (\because\ \text{全微分の定義}) \\
&= (\eta_1 + \eta_2)(\varphi^*(f)) \quad (\because\ \text{写像の合成の定義}) \\
&= \eta_1(\varphi^*(f)) + \eta_2(\varphi^*(f)) \quad (\because \eta_1, \eta_2\ \text{の線型性}) \\
&= (\eta_1 \circ \varphi^*)(f) + (\eta_2 \circ \varphi^*)(f) \quad (\because\ \text{写像の合成の定義}) \\
&= ((d\varphi)_p(\eta_1))(f) + ((d\varphi)_p(\eta_2))(f) \quad (\because\ \text{全微分の定義}) \\
&= ((d\varphi)_p(\eta_1) + (d\varphi)_p(\eta_2))(f) \quad (\because\ \text{線型写像}\ (d\varphi)_p(\eta_1), (d\varphi)_p(\eta_2)\ \text{の和の定義}) \\
&= \text{右辺}.
\end{aligned}$$

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問 11. (10 点) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $M = (M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とし, $p \in M$ とする. M 上の C^∞ 級関数全体のなす $\mathbb{R}$ 代数を $C^\infty(M)$ と書く. また $\eta \in T_pM$, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする.
このとき, $\lambda\eta : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ が $p \in M$ におけるライプニッツ則を満たすことの証明として, 以下の議論には数か所の不備がある. 適切に修正したものを述べよ (修正版を書いたうえで, 議論の不備がある箇所に印または説明をつけること).

議論: $f, g \in C^\infty(M)$ とする. 以下を示せばよい:

$$\boxed{\text{示すこと:}}\ (\lambda\eta)(f(p) \cdot g(p)) = ((\lambda\eta)(f) \cdot g(p)) + (f(p) \cdot (\lambda\eta)(g)).$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (\lambda\eta)(f(p) \cdot g(p)) \\
&= \lambda \cdot (\eta(f(p) \cdot g(p))) \quad (\because \text{線型写像のスカラー倍の定義}) \\
&= \lambda \cdot ((\eta(f) \cdot g(p)) + (f(p) \cdot \eta(g))) \quad (\because \eta \in T_pM) \\
&= \lambda \cdot (\eta(f) \cdot g(p)) + \lambda \cdot (f(p) \cdot \eta(g)) \quad (\because \mathbb{R} \text{ における分配則}) \\
&= ((\lambda \cdot \eta(f)) \cdot g(p)) + (f(p) \cdot (\lambda \cdot \eta(g))) \quad (\because \mathbb{R} \text{ における結合則と積の可換性}) \\
&= ((\lambda\eta)(f) \cdot g(p)) + (f(p) \cdot (\lambda\eta)(g)) \quad (\because \text{線型写像のスカラー倍の定義}) \\
&= \text{右辺}.
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ (30 点満点)

$\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ を二次元射影空間とする．$(O, U, \boldsymbol{u}), (O', V, \boldsymbol{v})$ をそれぞれ

- $O := \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq 0\}$, $U := \mathbb{R}^2$,
$$\boldsymbol{u} : O \to U,\ [x_1 : x_2 : x_3] \mapsto \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right),$$
- $O' := \{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},\ x_2 \neq 0\}$, $V := \mathbb{R}^2$,
$$\boldsymbol{v} : O' \to V,\ [x_1 : x_2 : x_3] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}\right)$$

と定める．以下, $(O, U, \boldsymbol{u}), (O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{LC}(\mathbb{R}\mathrm{P}^2; \mathbb{R}^2)$ を認めてよい．また $\boldsymbol{u} : O \to U$ の逆写像が

$$\boldsymbol{u}^{-1} : U \to O,\ u = (u_1, u_2) \mapsto [1 : u_1 : u_2]$$

であることも認めてよい．

問 12. (10 点) $(O, U, \boldsymbol{u})$ から $(O', V, \boldsymbol{v})$ への座標変換 $\tau_{\boldsymbol{uv}}$ を求めよ．定義域と値域も具体的に求めること．また $p = [1 : 1 : 1] \in O \cap O' \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ について,

$$\eta = \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_1}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_2}\right)_p \in T_p(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$$

を $\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right)_p$ の一次結合で書き下せ．

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問 13. (10 点) $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 上の関数 f を

$$f : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R},\ [x_1 : x_2 : x_3] \mapsto \frac{2x_1^2}{x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2}$$

と定める. f が well-defined であることを示せ. また U 上の関数 $f_{\boldsymbol{u}}$ を求めよ.

問 14. (10 点) 写像

$$\varphi : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2,\ [x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [x_1 + x_2 : x_2 : x_3]$$

について考える． 以下, φ が well-defined であり, C^∞ 級写像であるということは認めてよい. $p = [1 : 1 : 1] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ に対し, 線型写像 $(d\varphi)_p : T_p(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \to T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$ の階数を求めよ.

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{5}$ (25 点満点)

$X := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 = 1\}$ とおく.

問 15. (10 点) X が $\mathbb{R}^3$ の 2 次元正則部分多様体の構造を持つことを示せ.

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問 16. (15 点) 各 $p = (p_1, p_2, p_3) \in X$ について,

$$T_p\mathbb{R}^3 = \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \;\middle|\; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

の部分空間 T_pX を決定せよ.