圏論入門 2023

概 要

2023 年度圏論入門勉強会の資料

1 圏の定義と例

この節では, 圏を "定義" する. ただし, 以下では集合論におけるラッセルのパラドックスを無視した素朴かつ強引な定義をまず採用する. これは厳密には誤りであるが, 後で Grothendieck universe を導入することにより正当化を与える.

1.1 有向グラフ (雑な定義)

Definition 1.1. "集合" O, M および "写像" $s : M \to O$, $t : M \to O$ を考える. これらの四つ組 (O, M, s, t) をこの資料では **有向グラフ** と呼ぶことにする. ただし, 以下では "集合" や "写像" の概念についてはかなり緩い運用をすることに注意 (後で正当化する).

気持ちとしては, M の各元 f を矢印のようなものと思い, その矢印 f は "$s(f) \in O$ を出発して $t(f) \in O$ に向かう" ようなものと考える.

以下, この資料では, O の元を object (対象), M の元を morphism (射), $f \in M$ に対する $s(f)$ を f の source, $t(f)$ を f の target とよぶ.

本資料では, 以下を有向グラフの典型例であると考える:

Example 1.2. 以下の四つ組 (O, M, s, t) は有向グラフをなす:

- O : すべての集合を集めたもの,
- M : すべての写像 (集合と集合の間の) を集めたもの,

- $s : M \to O,\ f \mapsto f$ の定義域,
- $t : M \to O,\ f \mapsto f$ の終域 (値域).

もちろんこれは O や M が通常の意味では集合とは考えられない (ラッセルのパラドクスが発生する) という意味でまずいが, ここでは気にしないことにして話を進める. 後で正当化する.

1.2 圏 (雑な定義)

以下, $\Gamma := (O, M, s, t)$ を有向グラフとする.

Definition 1.3. $(f, g) \in M \times M$ が合成可能 (composable) であるとは, $s(f) = t(g)$ が成立することとする. また,

$$M \times_{(s,t)} M := \{(f, g) \in M \times M \mid \text{composable}\} \subset M \times M$$

とおく.

以下, 有向グラフ $\Gamma = (O, M, s, t)$ において, "写像"

$$\circ : M \times_{(s,t)} M \to M,\ (f, g) \mapsto f \circ g$$

および

$$\mathrm{id} : O \to M,\ x \mapsto \mathrm{id}_x$$

を定めておく. $f \circ g$ を $(f, g) \in M \times_{(s,t)} M$ の合成 (composition) といい, id_x を $x \in O$ における恒等射 (identity) という.

Definition 1.4. $\mathcal{C} := (\Gamma, \circ : M \times_{(s,t)} M \to M, \mathrm{id} : O \to M)$ が圏 (category) であるとは, 以下が成り立つこととする:

1. $s(f \circ g) = s(g)$ かつ $t(f \circ g) = t(f)$ for any $(f, g) \in M \times_{(s,t)} M$.
2. (結合律) 射の三つ組 $f, g, h \in M$ について, (f, g), (g, h) のどちらも composable であるとき, $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (注意: 上の条件から自動的に $(f, (g \circ h))$ と $((f \circ g), h)$ は composable).
3. $s(\mathrm{id}_x) = t(\mathrm{id}_x) = x$ for any $x \in O$.
4. (単位律) $f \circ \mathrm{id}_x = f$ かつ $\mathrm{id}_x \circ g = g$ for any $x \in O$, $f, g \in M$ with $s(f) = x = t(g)$.

1.3 圏の例

Example 1.5. 圏 $\mathrm{Set} = (\Gamma, \circ, \mathrm{id})$ を以下で定める:

- O : すべての集合を集めたもの,
- M : すべての写像 (集合と集合の間の) を集めたもの,
- $s : M \to O,\ f \mapsto f$ の定義域,
- $t : M \to O,\ f \mapsto f$ の終域 (値域),
- $\Gamma := (O, M, s, t)$ とおく. このとき

$$M \times_{(s,t)} M = \{(f, g) \mid f \text{ の定義域} = g \text{ の終域}\}.$$

- $\circ : M \times_{(s,t)} M \to M,\ (f, g) \mapsto f \circ g$ (写像の合成),
- $\mathrm{id} : O \to M,\ X \mapsto \mathrm{id}_X$ (集合 X 上の恒等写像).

これが定義 1.4 の 4 つの条件を満たしていることは, 集合論の一般論としてよく知っているはずである.

Example 1.6. $\mathbb{K}$ を体 (例として $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ など) とし, 圏 $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} = (\Gamma, \circ, \mathrm{id})$ を以下で定める:

1. O : すべての $\mathbb{K}$-vector space を集めたもの,
2. M : すべての $\mathbb{K}$-linear map ($\mathbb{K}$-vector space の間の) を集めたもの
3. s, t, $\circ$, id は Set と同様に定める.

これが定義 1.4 の 4 つの条件を満たしていることを示すには, 以下の二つを確認すれば十分である:

- $\mathbb{K}$-linear map 同士の合成は $\mathbb{K}$-linear map になる.
- 各 $\mathbb{K}$-vector space V について, V 上の恒等写像は $\mathbb{K}$-linear map である.

これらは線型代数の一般論としてよく知っているはずである.

同様に $s, t, \circ, \mathrm{id}$ を Set と同じように定めつつ, O, M をいろいろ取り換えることにより, 様々な圏が得られる.

Example 1.7. 圏 Top とは

- O : すべての位相空間を集めたもの
- M : すべての連続写像 (位相空間の間の) を集めたもの

として得られる圏.

Example 1.8. 圏 C^∞-mfd とは

- O : すべての C^∞ 級多様体を集めたもの
- M : すべての C^∞ 級写像 (C^∞ 級多様体の間の) を集めたもの

として得られる圏.

Example 1.9. 圏 Grp とは

- O : すべての群を集めたもの
- M : すべての群準同型 (群の間の) を集めたもの

として得られる圏.

また "写像の合成" として射の合成を定義しないで得られる圏ももちろんある:

Example 1.10. 自明圏とは

- O : 一点集合
- M : 一点集合

となるような圏 (s, t, $\circ$, id は一意に定まる) のことである.

Example 1.11. 空圏とは

- O : 空集合
- M : 空集合

となるような圏 (s, t, $\circ$, id は空写像として一意に定まる) のことである.

Example 1.12. $(M, \circ, e)$ を monoid (つまり, M は集合であり, 結合律を満たす二項演算 $\cdot : M \times M \to M$ と単位元 e が定まっている) とする. このとき,

- $O := \{M\}$ (一点集合),
- $s(f) = t(f) = M$ for each $f \in M$, (このとき $M \times_{(s,t)} M = M \times M$)
- $\mathrm{id}_M := e \in M$

とおけば, $((O, M, s, t), \cdot, \mathrm{id})$ は object 集合が一点となるような圏をなす. また逆に object 集合が一点となるような圏は morphism 集合を台集合とするような monoid とみなせる.

Example 1.13. (Ω, R) を前順序集合 (pre-ordered set), つまり, Ω を集合とし, $R \subset \Omega \times \Omega$ が反射律 ($(x, x) \in R$ for any $x \in \Omega$) と推移律 ($(x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$) を満たしているとする (ここでは反対称律は要請しない). このとき,

- $O := \Omega$,
- $M = R$,
- $s(x, y) = x$, $t(x, y) = y$ for each $(x, y) \in R \subset M \times M$, (このとき $M \times_{(s,t)} M = \{((x, y), (y, z)) \mid (x, y), (y, z) \in R\}$),
- $(x, y) \circ (y, z) := (x, z)$ for each $((x, y), (y, z)) \in M \times_{(s,t)} M$,
- $\mathrm{id}_x := (x, x) \in M$ for each $x \in O$,

とおくと, $((O, M, s, t), \circ, \mathrm{id})$ は圏となる.

2 同型射

以下, $\mathcal{C} = ((O, M, s, t), \circ, \mathrm{id})$ を圏とする. 対象の組 $(X, Y) \in O \times O$ について,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) := \{f \in M \mid s(f) = x, t(f) = y\}$$

とおく.

Definition 2.1. $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ に対して, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ が f の逆射 (inverse morphism) であるとは, $g \circ f = \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ となること.

Proposition 2.2. 逆射は (存在するなら) 一意.

Definition 2.3. 逆射を持つような射を同型射 (isomorphism) とよぶ.

Definition 2.4. 対象 X と Y が同型であるとは, X から Y への同型射が存在することとする.

Proposition 2.5. “同型” は対象集合 O における同値関係を定める.

Example 2.6.

- 圏 Set における同型射は全単射写像のこと.
- 圏 $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ における同型射は $\mathbb{K}$ 線型同型写像のこと.
- 圏 Top における同型射は同相写像のこと.
- 圏 C^∞-mfd における同型射は C^∞ 級微分同相写像のこと.
- 圏 Grp における同型射は群同型写像のこと.
- Monoid $(M, \circ, e)$ を圏とみなしたとき, $f \in M$ が同型射であることと f が可逆元であることは同値.
- 前順序集合 (Ω, R) を圏とみなしたとき, $(x, y) \in R$ が同型射であることと $(y, x) \in R$ となることは同値.

Example 2.7. 圏 Ho(Top) を以下で定める.

- O : すべての位相空間を集めたもの,
- $M := \bigsqcup_{X,Y \in O} [X, Y]$,
- $s([\phi]) = X$ for $[\phi] \in [X, Y]$,
- $t([\phi]) = Y$ for $[\phi] \in [X, Y]$,
- 合成 : ホモトピー類の合成 (幾何学 B 講義で定義した),
- 恒等射 : $[\mathrm{id}_X]$.

圏 Ho(Top) を Top (位相空間と連続写像の圏) のホモトピー圏という. Ho(Top) における同型射をホモトピー同値写像という. また Ho(Top) の対象 (位相空間) X と Y が同型であることをホモトピー同値であるという.

2.1 亜群

Definition 2.8. すべての射が同型であるような圏を亜群 (groupoid) という.

Example 2.9. Monoid M を object が一つしかない圏とみなしたとき, その圏が groupoid であることと, monoid M が群 (つまりすべての元が可逆) となることは同値.

Example 2.10. X を位相空間とする.

- $O := X$,
- $M := \Pi(X) := \bigsqcup_{x,y \in X} \Pi(X, x, y)$, ただし $\Pi(X, x, y)$ は $\mathrm{Path}(X, x, y)$ を境界条件を満たすホモトピーで割ったもの.
- 合成 : $*$ (道をつなぐ; 幾何学 B 講義で定義したもの)
- 恒等射 : $[\gamma_0^{x,x}]$ ただし, $\gamma_0^{x,x} : I \to X,\ s \mapsto x$.

とおくと, これは圏になる. この圏は亜群である (X の基本亜群). 各射 $[\gamma^{a,b}]$ の逆射は $[\overline{\gamma^{a,b}}]$ (幾何学 B 講義で定義した).

3 関手

3.1 有向グラフと準同型, 反準同型

有向グラフの間の準同型の定義:

Definition 3.1. $\Gamma_i = (O_i, M_i, s_i, t_i)$ $(i = 1, 2)$ を有向グラフとする.

$$F = (F_O, F_M) : \Gamma_1 \to \Gamma_2$$

が Γ_1 から Γ_2 への準同型であるとは, 以下を満たすこととする:

- $F_O : O_1 \to O_2$ は写像,
- $F_M : M_1 \to M_2$ は写像,

- $s_2 \circ F_M = F_O \circ s_1$ as $M_1 \to O_2$. すなわち[1]:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "F_M"] \arrow[d, "s_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M_2 \arrow[d, "s_2"] \\ O_1 \arrow[r, "F_O"] & O_2, \end{tikzcd}$$

- $t_2 \circ F_M = F_O \circ t_1$ as $M_1 \to O_2$. すなわち:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "F_M"] \arrow[d, "t_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M_2 \arrow[d, "t_2"] \\ O_1 \arrow[r, "F_O"] & O_2. \end{tikzcd}$$

Proposition 3.2. 上記 Definition の設定において, $F_O : O_1 \to O_2$, $F_M : M_1 \to M_2$ がそれぞれ写像であるとする. このとき, $F = (F_O, F_M) : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ が準同型であることと, 任意の $A, B \in O_1$ について,

$$F_M(\mathrm{Hom}_{\Gamma_1}(A, B)) \subset \mathrm{Hom}_{\Gamma_2}(F_O(A), F_O(B))$$

を満たすことは同値.

有向グラフの間の反準同型の定義:

Definition 3.3. $\Gamma_i = (O_i, M_i, s_i, t_i)$ $(i = 1, 2)$ を有向グラフとする.

$$F = (F_O, F_M) : \Gamma_1 \to \Gamma_2$$

が Γ_1 から Γ_2 への反準同型であるとは, 以下を満たすこととする:

- $F_O : O_1 \to O_2$ は写像,
- $F_M : M_1 \to M_2$ は写像,
- $t_2 \circ F_M = F_O \circ s_1$ as $M_1 \to O_2$. すなわち[2]:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "F_M"] \arrow[d, "s_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M_2 \arrow[d, "t_2"] \\ O_1 \arrow[r, "F_O"] & O_2, \end{tikzcd}$$

[1]図の中の "$\circlearrowright$" の記号は可換性, つまりどの経路で合成しても同じ結果になるということを表している. このような可換な図式を可換図式という

[2]図の中の "$\circlearrowright$" の記号は可換性, つまりどの経路で合成しても同じ結果になるということを表している. このような可換な図式を可換図式という

- $s_2 \circ F_M = F_O \circ t_1$ as $M_1 \to O_2$. すなわち:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "F_M"] \arrow[d, "t_1"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_2 \arrow[d, "s_2"] \\ O_1 \arrow[r, "F_O"] & O_2. \end{tikzcd}$$

Proposition 3.4. 上記 Definition の設定において, $F_O : O_1 \to O_2$, $F_M : M_1 \to M_2$ がそれぞれ写像であるとする. このとき, $F = (F_O, F_M) : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ が反準同型であることと, 任意の $A, B \in O_1$ について,

$$F_M(\mathrm{Hom}_{\Gamma_1}(A, B)) \subset \mathrm{Hom}_{\Gamma_2}(F_O(B), F_O(A))$$

(順序に注意) を満たすことは同値.

3.1.1 関手 (共変関手, 反変関手)

圏の間の共変関手 (または単に関手とよぶこともある) の定義:

Definition 3.5. $\mathcal{C}_i = (O_i, M_i, s, t, \circ, \mathrm{id})$ $(i = 1, 2)$ を圏とする. $F = (F_O, F_M) : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ が共変関手 (covariant functor) であるとは以下を満たすこととする:

- $\Gamma_i = (O_i, M_i, s, t)$ とおいたとき, $F = (F_O, F_M)$ は有向グラフ Γ_1 から有向グラフ Γ_2 への準同型. 特に $A, B \in O_1$ について,

  $$F_M(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, B)) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F_O(A), F_O(B))$$

  となることに注意.

- F は恒等射を保つ. すなわち, 任意の $A \in O_1$ について,

  $$F_M(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F_O(A)} \quad \text{in } \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F_O(A), F_O(A))$$

  が成り立つ.

- F は合成を保つ. すなわち, 任意の $(\varphi, \psi) \in M_1 \times_{s,t} M_1$ について,

  $$F_M(\varphi \circ \psi) = F_M(\varphi) \circ F_M(\psi) \quad \text{in } M_2$$

  が成り立つ[3].

[3]両辺がそれぞれ定義されることは F が有向グラフの間の準同型であることから従う.

反変関手の定義:

Definition 3.6. $\mathcal{C}_i = (O_i, M_i, s, t, \circ, \mathrm{id})$ $(i = 1, 2)$ を圏とする． $F = (F_O, F_M) : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ が反変関手 (contravariant functor) であるとは, 以下が成り立つことを意味する:

- $\Gamma_i = (O_i, M_i, s, t)$ とおいたとき, $F = (F_O, F_M)$ は有向グラフ Γ_1 から有向グラフ Γ_2 への反準同型. 特に $A, B \in O_1$ について,

$$F_M(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(A, B)) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F_O(B), F_O(A))$$

  となることに注意.

- F は恒等射を保つ. すなわち, 任意の $A \in O_1$ について,

$$F_M(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F_O(A)} \quad \text{in } \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_2}(F_O(A), F_O(A))$$

  が成り立つ.

- 任意の $(\varphi, \psi) \in M_1 \times_{s,t} M_1$ について,

$$F_M(\varphi \circ \psi) = F_M(\psi) \circ F_M(\varphi) \quad \text{in } M_2$$

  が成り立つ (順序に注意)[4].

[4]両辺がそれぞれ定義されることは F が有向グラフの間の反準同型であることから従う.