幾何学 B 期末試験サンプル問題 (救済レポート課題) 問 1–8

期末試験時の注意点: 持ち込み可です. 持ち込んだ紙資料および, PC やスマホを見たりネット検索しても構いません. ただし持ち込み資料を他受験者と共有したり, 他人とチャットや掲示板などでリアルタイムで連絡を取る行為は禁止します. また AI とチャットすることも禁止します.

記号について: この試験を通じて, 原則として記号は講義に準拠するものとします.

問 1. 以下の (1) – (8) で紹介する定義達について, 修正の必要がある場合はそれぞれ正しく修正したものを述べよ (修正版を書いたうえで, 修正した箇所に印または説明をつけること). また修正の必要がない場合には「修正の必要なし」とせよ (講義と同じ意味の定義を違う言い回しで紹介している場合もあるので注意せよ).

(1) X, Y を位相空間とし, $\phi, \psi \in \mathcal{C}(X, Y)$ とする. H が ϕ から ψ へのホモトピーであるとは, $H \in \mathcal{C}(X \times I, Y)$ であって, 任意の $x \in X$ に対して $H(x, 0) = \phi(0)$ かつ $H(x, 1) = \psi(1)$ が成り立つこと.

(2) (X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2) をそれぞれ位相空間の三つ組とし, $\phi, \psi \in \mathcal{C}((X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2))$ とする. H が ϕ から ψ への境界条件を満たすホモトピーであるとは, H が ϕ から ψ へのホモトピーであり, さらに各 $i = 1, 2$ について $H(A_i \times I) \subset B_i$ を満たすこと.

(3) X を位相空間とする. 各 $a, b \in X$ について, $\mathrm{Path}(X, a, b) := \mathcal{C}((I, 0, 1), (X, a, b))$ とおく. また $\gamma, \gamma' \in \mathrm{Path}(X, a, b)$ について, $\gamma \sim_{h.b.} \gamma'$ となることを, γ から γ' への境界条件を満たすホモトピーが存在することとして定める. さらに同値関係 “$\sim_{h.b.}$” による $\mathrm{Path}(X, a, b)$ の商集合を $\Pi(X, a, b)$ と書く.

(4) X を位相空間とする. $\Pi(X) := \coprod_{a,b \in X} \Pi(X, a, b)$ を X の基本亜群という. また各 $a \in X$ について, $\pi_1(X, a) := \coprod_{b \in X} \Pi(X, a, b)$ を (X, a) の基本群という.

(5) X を位相空間とする. $a, b, c \in X$ とし, $\alpha \in \Pi(X, a, b)$, $\beta \in \Pi(X, b, c)$ とする. このとき $\beta * \alpha \in \Pi(X, a, c)$ を

$$\beta * \alpha := [\gamma_\beta * \gamma_\alpha]_b$$

として定義する. ただし $\gamma_\beta \in \beta \subset \mathrm{Path}(X, b, c)$, $\gamma_\alpha \in \alpha \subset \mathrm{Path}(X, a, b)$ とした.

(6) X, Y を位相空間とし, $\phi \in \mathcal{C}(X, Y)$ とする. このとき基本亜群 $\Pi(Y)$ から $\Pi(X)$ への写像 ϕ_* を

$$\phi_* : \Pi(Y) \to \Pi(X),\ [\gamma]_b \mapsto [\phi \circ \gamma]_b$$

と定める.

(7) S を集合とし, $(\mathrm{FG}(S), \eta)$ を S の生成する自由群とする. また R を $\mathrm{FG}(S)$ の部分集合とし, R の $\mathrm{FG}(S)$ における正規閉包を $\hat{R}$ とする. このとき群 $\mathrm{FG}(S)$ の正規部分群 $\hat{R}$ による商群 $\mathrm{FG}(S)/\hat{R}$ を $\langle\ S \mid R\ \rangle$ と表す.

(8) 連続写像 $\pi : E \to X$ について考える. (U, η) が π の F-局所自明化であるとは, U が X の部分集合であって, $\eta : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ は同相で, さらに $p_U \circ \eta = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$ を満たすものとする. ただし $p_U : U \times F \to U$ は射影とする. また $\pi : E \to X$ が F-被覆写像であるとは, 各 $x \in X$ について, F-局所自明化 (U, η) であって, $x \in U$ となるものが存在することとする.

裏へ

問 2. 以下の主張 A – 主張 H のうち「主張内容が正しい」ものをすべて挙げよ．また正しくない主張についてはそれぞれどういう意味で主張が正しくないのか簡単に説明せよ (修正案を提示する必要はない):

主張 A: $X := S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $Y := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする．また

$$\phi : X \to Y,\ z \mapsto 1$$

とおく．このとき ϕ は X から Y へのホモトピー同値写像である．

主張 B: $\mathbb{R}^2$ は可縮である．

主張 C: X を弧状連結位相空間とする．このとき任意の $a, b \in X$ について, $\pi_1(X, a)$ と $\pi_1(X, b)$ は群として同型である．

主張 D: X, Y を位相空間とし, $\phi : X \to Y$ をホモトピー同値写像とする．このとき, 任意の $a \in X$, $b \in Y$ について,

$$\phi_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, b),\ [\gamma]_b \mapsto [\phi \circ \gamma]_b$$

は群同型写像を与える．

主張 E: X, Y を位相空間とし, $a \in X$ とし, $\phi, \psi \in \mathcal{C}(X, Y)$ with $\phi(a) = \psi(a)$ とする．以下, $b := \phi(a) = \psi(a) \in Y$ とおく．また任意の $\theta \in \pi_1(Y, b)$ について, ある $\alpha \in \pi_1(X, a)$ が存在して,

$$(\phi_*(\alpha)) \neq \theta * (\psi_*(\alpha)) * \overline{\theta}$$

であるとする．ただしここで $\overline{\theta}$ は θ の $\pi_1(Y, b)$ における逆元とする．このとき ϕ と ψ はホモトピックではない．

主張 F: G_1, G_2, H をそれぞれ群とし, $i_1 : H \to G_1$, $i_2 : H \to G_2$ をそれぞれ群準同型とする．このとき (Z, j_1, j_2) および (Z', j_1', j_2') をそれぞれ (G_1, G_2, H, i_1, i_2) の融合積とすると, 群同型写像 $\Phi : Z \to Z'$ が一意に存在する．

主張 G: 写像

$$\pi : \mathbb{R} \to S^1,\ \theta \mapsto \exp(2\pi i\theta)$$

は $\mathbb{Z}$-被覆写像である．ただし $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とおいた．

主張 H: $* \in S^1$ を任意に固定したとき, $\pi_1(S^1, *)$ は無限巡回群 $\mathbb{Z}$ と群として同型である．

主張 I: X を弧状連結かつ局所弧状連結位相空間, E を単連結位相空間, F を離散空間とし, $\pi : E \to X$ を F-被覆写像とする．このとき, 各 $a \in X$ について, $\pi_1(X, a)$ と F の間に全単射が存在する．

二枚目へ

問 3. $X := S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $Y := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とおく．また $\phi, \psi \in \mathcal{C}(X, Y)$ をそれぞれ $\phi(z) := z$, $\psi(z) = 1$ $(z \in X)$ として定める．

以下,「ϕ から ψ へのホモトピーは存在しない」という主張[*1]と, その議論を掲載する．以下の議論には大きな誤りがある．議論の誤りがある箇所に印をつけ, どういう誤りであるか説明をつけよ (修正案を提示する必要はない)．

主張: ϕ から ψ へのホモトピーは存在しない．

議論:

$$H : X \times I \to Y,\ (z, t) \mapsto (1 - t)z + t$$

とおく．このとき明らかに H は連続で, また任意の $z \in X$ について $\phi(z) = H(z, 0)$ かつ $\psi(z) = H(z, 1)$ を満たす．

したがって, 主張を証明するためには, 以下を示せばよい:

$\boxed{\text{示すこと:}}$ H は写像として well-defined ではない．

$(z, t) := (-1, 1/2) \in X \times I$ とおく．このとき $(1 - t)z + t = (1/2) \cdot (-1) + (1/2) = 0$ となり, これは $Y = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ の元ではない．したがって,

$$H : X \times I \to Y,\ (z, t) \mapsto (1 - t)z + t$$

は写像として well-defined ではない．

問 4. $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $* := 1$ とおく．

以下,「$\pi_1(S^1, *)$ は自明群である」という主張[*2]と, その議論を掲載する．以下の議論には大きな誤りがある．議論の誤りがある箇所に印をつけ, どういう誤りであるか説明をつけよ (修正案を提示する必要はない)．

主張: $\pi_1(S^1, *)$ は自明群である．

議論: $U_1 := S^1 \setminus \{i\}$, $U_2 := S^1 \setminus \{-i\}$ とおく．また $V := U_1 \cap U_2$ とおく．このとき U_1, U_2 はそれぞれ S^1 の開集合であり, また $U_1 \cup U_2 = S^1$ かつ $* \in V$ であることに注意すると, ファンカンペンの定理より, $\pi_1(X, *)$ は $(\pi_1(U_1, *), \pi_1(U_2, *), \pi_1(V, *), i^1_*, i^2_*)$ の融合積である．ただし $i^k : V \to U_k$ は包含写像とする．

いま U_1, U_2 はそれぞれ $\mathbb{R}$ と同相であるから特に可縮であり, したがって $\pi_1(U_1, *)$, $\pi_1(U_2, *)$ は自明群である．一般に「(G_1, G_2, H, i_1, i_2) のうち G_1, G_2 が自明群である」という状況において, その融合積は自明群となる．したがって, $\pi_1(S^1, *)$ は自明群である．

裏へ

[*1] 紹介している議論の内容は誤りがあるが, この主張自体は正しい

[*2] この主張自体誤りである

問 5. $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とし, $S^1 \vee S^1 := \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 \mid z_1 = 1 \text{ or } z_2 = 1\}$, $* := (1,1) \in S^1 \vee S^1$ とする. このとき, ファンカンペンの定理を用いて $\pi_1(S^1 \vee S^1, *)$ の表示を求めよ.

問 6. Σ_2 を種数 2 の閉曲面 (2 人乗り浮き輪) とし, $* \in \Sigma_2$ を固定する. ファンカンペンの定理を用いて基本群 $\pi_1(\Sigma_2, *)$ の表示を求めよ (アップロードされている講義ノートについては誤りがあるので注意).

問 7. 群 G が集合 S に作用しているとき, その作用が固定点自由であるとは, 「任意の $s \in S$ について, $g \cdot s = s$ となる $g \in G$ は単位元に限る」こととする.

以下, E, X を弧状連結な位相空間とし, F を離散空間とする. また $\pi : E \to X$ を F-被覆写像とし, π の被覆変換群を $\mathrm{Aut}(\pi)$ とする. このとき $\mathrm{Aut}(\pi)$ の E への自然な作用は固定点自由であることを示せ. ただし, 以下の定理 $(\star)$ は認めてよい:

定理 $(\star)$ 上記の設定において, Ω を連結な位相空間, $\omega_0 \in \Omega$ とし, $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \mathcal{C}(\Omega, E)$ が $\pi \circ \tilde{f}_1 = \pi \circ \tilde{f}_2$ かつ $\tilde{f}_1(\omega_0) = \tilde{f}_2(\omega_0)$ を満たすとする. このとき $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

問 8. (余裕のある人向け) $X := S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $Y := S^1 \vee S^1 := \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 \mid z_1 = 1 \text{ or } z_2 = 1\}$ とおく. また, $\phi, \psi \in \mathcal{C}(X, Y)$ を

$$\phi(z) = (z, 1),\ \psi(z) = (1, z)$$

($z \in S^1$) として定める.

(1) $S^1 \vee S^1$ を表す図を描け. また ϕ と ψ の像についても図の中で表せ.

(2) 三次対称群 $\mathfrak{S}_3$ において, τ を $1, 2$ の互換とし, σ を $1, 2, 3$ の巡回置換とする (すなわち $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$). このとき以下を確認せよ:

i. $\mathfrak{S}_3$ は $\{\tau, \sigma\}$ により生成される.

ii. τ と σ は共役ではない. すなわち任意の $\theta \in \mathfrak{S}_3$ について,

$$\tau \neq \theta \circ \sigma \circ (\theta^{-1}).$$

(3) 二点集合の生成する自由群は三次対称群 $\mathfrak{S}_3$ への全射群準同型を持つことを示せ.

(4) 二点集合 $S := \{a, b\}$ が生成する自由群 $(\mathrm{FG}(S), \eta)$ において, $a := \eta(a)$, $b := \eta(b)$ とおく (記号の乱用). このとき $a, b \in \mathrm{FG}(S)$ が共役でない, すなわち任意の $\theta \in \mathrm{FG}(S)$ に対して,

$$a \neq \theta \cdot b \cdot (\theta^{-1})$$

となることを示せ.

(5) ϕ と ψ がホモトピックでないことを示せ.