§3 ホモトピー

やること：連続写像の間の

"連続変形（ホモトピー）"

を Def する.

§3.1: Def of ホモトピー

設定: X, Y: 位相空間

記号: $C(X, Y) := \{ \varphi : X \to Y \mid$ 連続 $\}$

$I := [0, 1]$: 閉区間

Def 3.1.1 :

$\phi, \psi \in C(X, Y)$ とする.

$$\left(\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "\phi"] \arrow[r, shift right, "\psi"'] & Y \end{tikzcd} \right)$$

写像 $H : X \times I \to Y$ が ϕ から ψ へのホモトピー

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ① H は連続 ($X \times I$ には直積位相を入れる)

& ② $H(x, 0) = \phi(x) \quad (\forall x \in X)$

& ③ $H(x, 1) = \psi(x) \quad (\forall x \in X)$

Ex 3.1.2:

$X := S^1 := \{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \}$

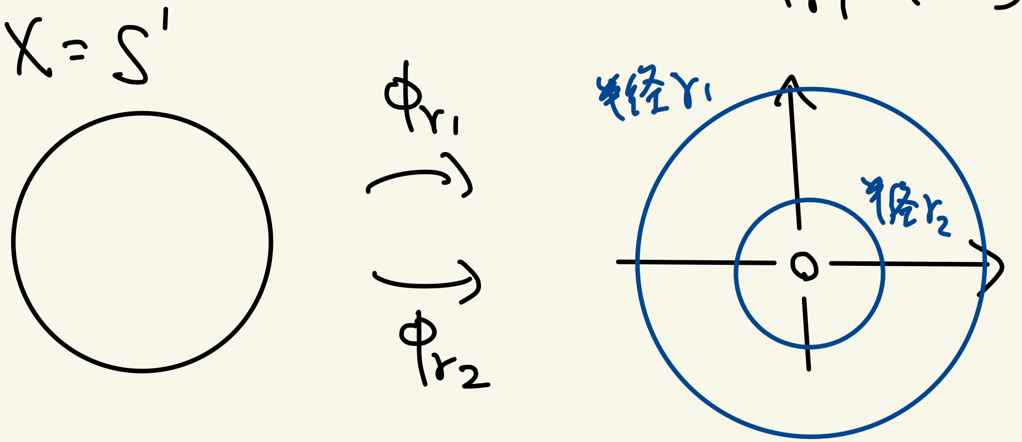
$Y := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とする.

1: $\phi_r : X \to Y,\ x \mapsto rx$ $(r > 0)$ とおく.

このとき $r_1, r_2 > 0$ に対して

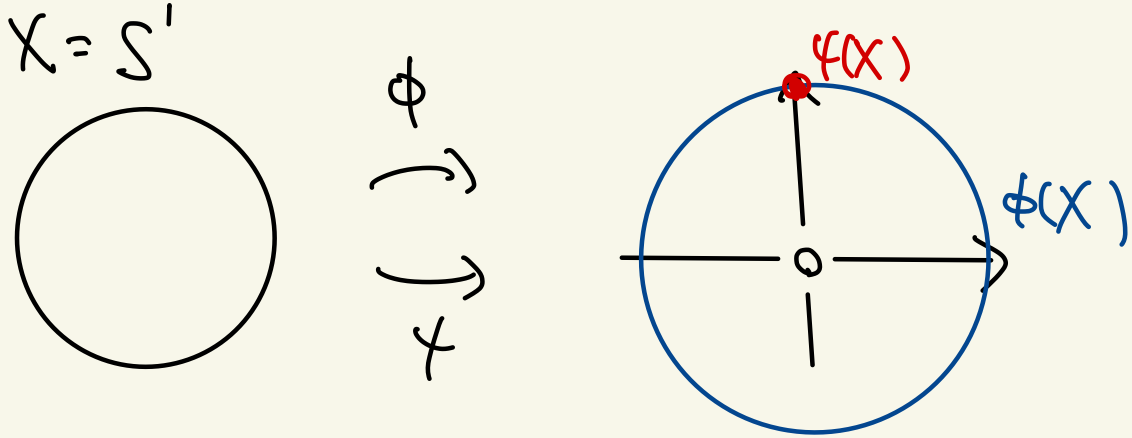
$$H : X \times I \to Y,\ (x, t) \mapsto ((1-t)r_1 + t r_2)x$$

は ϕ_{r_1} から ϕ_{r_2} へのホモトピー



2: $\phi : X \to Y,\ x \mapsto x$

$\psi : X \to Y,\ x \mapsto (0,1)$ とする.



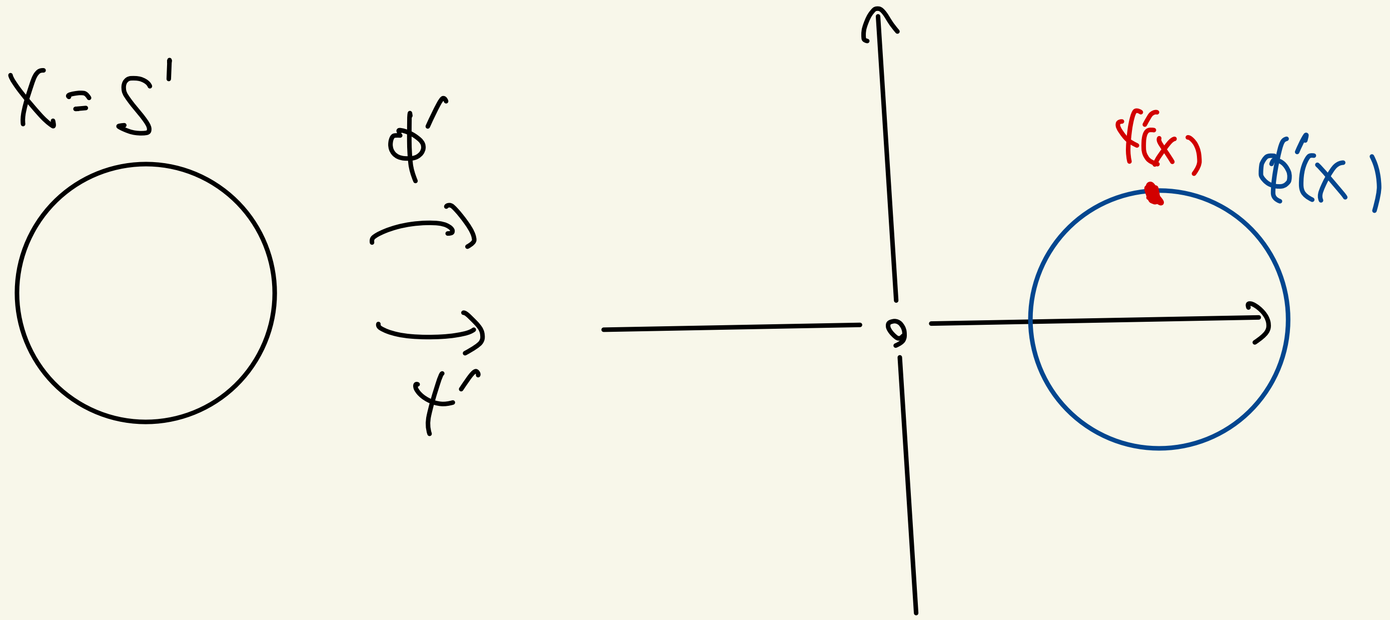
Q: $H : X \times I \to Y,\ ((x_1, x_2), t) \mapsto ((1-t)x_1, (1-t)x_2 + t)$

は ϕ から ψ へのホモトピー？

⇝ ダメ！（原点を"通過"）

3. $\phi' : X \to Y,\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 2, x_2)$

$\psi' : X \to Y,\ (x_1, x_2) \mapsto (2, 1)$ とおく.



このとき

$$H' : X \times I \to Y,\ ((x_1, x_2), t) \mapsto ((1-t)x_1 + 2,\ (1-t)x_2 + t)$$

は ϕ' から ψ' へのホモトピー

§3.2：ホモトピーの各種性質

Thm 3.2.1：X, Y：位相空間とする．

(1)：各 $\phi \in C(X, Y)$ について

$$H : X \times I \to Y,\ (x, t) \mapsto \phi(x)$$

は ϕ から ϕ へのホモトピー

(2)：各 $\phi, \psi \in C(X, Y)$ について

$H : X \times I \to Y$ が ϕ から ψ へのホモトピーとする．

このとき

$$H' : X \times I \to Y,\ (x, t) \mapsto H(x, 1-t)$$

は ψ から ϕ へのホモトピー

(3): $\phi, \psi, \xi \in C(X, Y)$ とし,

$H : X \times I \to Y$ を ϕ から ψ

$G : X \times I \to Y$ を ψ から ξ

へのホモトピーとする.

このとき,

$$K : X \times I \to Y,\ (x, t) \mapsto \begin{cases} H(x, 2t) & \left(0 \le t \le \frac{1}{2}\right) \\ G(x, 2t-1) & \left(\frac{1}{2} \le t \le 1\right) \end{cases}$$

は ϕ から ξ へのホモトピー

(Hint: Cor 2.1.2)

Thm 3.2.2 : X, Y, Z : 位相空間とする.

$\phi_1, \psi_1 \in C(X, Y)$, $\phi_2, \psi_2 \in C(Y, Z)$ とし,

$H_1 : X \times I \to Y$ を ϕ_1 から ψ_1
$H_2 : Y \times I \to Z$ を ϕ_2 から ψ_2 へのホモトピーとする.

このとき $H : X \times I \to Z$, $(x, t) \mapsto H_2(H_1(x, t), t)$

は $(\phi_2 \circ \phi_1)$ から $(\psi_2 \circ \psi_1)$ へのホモトピー

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "\phi_1"] \arrow[r, bend right, "\psi_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow H_1"] & Y \arrow[r, bend left, "\phi_2"] \arrow[r, bend right, "\psi_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow H_2"] & Z
\end{tikzcd}
\Rightarrow
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "\phi_2 \circ \phi_1"] \arrow[r, bend right, "\psi_2 \circ \psi_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow H"] & Z
\end{tikzcd}
$$