§4：連続写像のホモトピー類

やること：

$C(X,Y)$ に

ホモトピーによる同値類 $\sim_h$

を定める．

§4.1 : Def of ホモトピー類

設定 : X, Y : 位相空間とする.

記号 : $C(X,Y) := \{\varphi : X \to Y$ 連続$\}$.

Def 4.1.1 : $\phi, \psi \in C(X,Y)$ とする.

ϕ と ψ が ホモトピック（この講義では $\phi \sim_h \psi$ と書く）

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\exists H$: ϕ から ψ への ホモトピー

Thm 4.1.2 : "$\sim_h$" は $C(X,Y)$ 上の同値関係

(Hint : Thm 3.2.1)

各 $\phi \in C(X,Y)$ の

$\sim_h$ に関する同値類（ホモトピー類と呼ぶ）

を $[\phi]$ と書く，

i.e. $[\phi] := \{ \phi' \in C(X,Y) \mid \phi' \sim_h \phi \} \subset C(X,Y)$

また $[X,Y] := C(X,Y)/\sim_h$（商集合）とおく．

Ex 4.1.3 :

Ex 3.1.2 において

$$\Phi_{r_1} \sim_h \Phi_{r_2} \text{ かつ } \varphi' \sim_h \psi'.$$

「$\Phi \sim_h \Psi$ は成り立つか？」は難しい問いである.

直感的には $\Phi \not\sim_h \Psi$ となりそうだが

証明が難しい

後で"基本群"を用いて「$\Phi \not\sim_h \Psi$」を証明する.

§4.2：ホモトピー類の合成

Thm 4.2.1： X, Y, Z：位相空間とする.

このとき "ホモトピー類の合成"

$$\begin{array}{ccc} [Y, Z] \times [X, Y] & \to & [X, Z] \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ ([\phi_2], [\phi_1]) & \mapsto & [\phi_2] \circ [\phi_1] := [\phi_2 \circ \phi_1] \end{array}$$

は well-defined.

Hint：Thm 3.2.2.

Prop 4.22 ホモトピー類の合成は結合的,

つまり "$([\phi_3]\circ[\phi_2])\circ[\phi_1]$

$= [\phi_3]\circ([\phi_2]\circ[\phi_1])$"

また恒等写像のホモトピー類は単位的

つまり

"$[\phi]\circ[id_X] = [\phi]$, $[id_X]\circ[\psi] = [\psi]$".