§5：ホモトピー同値写像

やること：

"2つの位相空間が

ホモトピー同値"

をDefする．

§5.1 : Def of ホモトピー同値

設定 : X, Y : 位相空間

Def 5.1.1 : $\phi \in C(X,Y)$ が ホモトピー同値
($[\phi] \in [X,Y]$ が)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \psi \in C(Y,X)$ s.t. $[\psi]\circ[\phi] = [\mathrm{id}_X]$
($\exists [\psi] \in [Y,X]$ s.t.) かつ
$[\phi]\circ[\psi] = [\mathrm{id}_Y]$

Def 5.1.2 : X と Y が ホモトピー同値 ($X \simeq_h Y$ と書く この講義では)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ ホモトピー同値 $X \to Y$.

Prop 5.1.3 : "$\simeq_h$" は "同値関係" on "すべての位相空間の集まり"

すなわち

1 : $X \simeq_h X$ $(\forall X)$

2 : $X \simeq_h Y \Rightarrow Y \simeq_h X$

3 : $X \simeq_h Y$ かつ $Y \simeq_h Z \Rightarrow X \simeq_h Z$

Prop 5.1.4：同相 ⇒ ホモトピー同値

（逆は成り立たない）

"ホモトピー同値"は"同相"

より更に"やわらかい"

ものの見方.

Ex 5.1.5 :

$\mathbb{R}$, $(-1,1)$, $[-1,1]$, $\{0\}$

はお互いホモトピー同値

$\because$ $\mathbb{R}$ と $(-1,1)$ は同相なので $\mathbb{R} \simeq_h (-1,1)$

($\because$ Prop 5.1.4)

$\mathbb{R} \simeq_h \{0\}$ ① と $[-1,1] \simeq_h \{0\}$ ② をそれぞれ示そう。

① について

(示) $\mathbb{R} \simeq_h \{0\}$

i.e. $\exists \phi : \mathbb{R} \to \{0\}$: ホモトピー同値

$\phi : \mathbb{R} \to \{0\},\ r \mapsto 0$ とおく.

(示) ϕ : ホモトピー同値

i.e. $\exists \psi : \{0\} \to \mathbb{R}$ s.t. $[\phi] \circ [\psi] = [id_{\{0\}}]$ かつ

$[\psi] \circ [\phi] = [id_{\mathbb{R}}]$

$\psi : \{0\} \to \mathbb{R},\ 0 \mapsto 0$ とおく.

示 $[\phi]\circ[\psi] = [\mathrm{id}_{\{0\}}]$ かつ $[\psi]\circ[\phi] = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}}]$

Recall : $[\phi]\circ[\psi] := [\phi\circ\psi]$

示 $\phi\circ\psi \sim_h \mathrm{id}_{\{0\}}$ かつ $\psi\circ\phi \sim_h \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$

$\phi\circ\psi = \mathrm{id}_{\{0\}}$ より $\phi\circ\psi \sim_h \mathrm{id}_{\{0\}}$

示 $\exists H$: ホモトピー from $\psi\circ\phi$ to $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$

$\psi\circ\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$ に注意

$H : \mathbb{R}\times I \to \mathbb{R},\ (r, t) \mapsto tr$ とおけばよい

(詳細略) ①おわり

②も似たようなやり方で証明できる.

Ex 5.1.6 : $S^1 \simeq_h \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

∵ $X := S^1$, $Y := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とおく.

$\phi : X \to Y,\ x \mapsto x$

$\psi : Y \to X,\ y \mapsto \frac{1}{\|y\|} y \quad \left(\|y\| := \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \right)$

とおく.

$\psi \circ \phi = id_X$ より $[\psi] \circ [\phi] = [id_X]$.

また $H : Y \times I \to Y$

$(y, t) \mapsto \left(t + \frac{1-t}{\|y\|}\right) y$

は $\phi \circ \psi$ から id_Y へのホモトピーとなるので

$[\phi] \circ [\psi] = [id_Y]$ ∎

ホモトピー同値と直積：

追加スライド

Thm 5.1.7

ホモトピー同値写像たちの

有限直積はホモトピー同値写像

i.e. $(\phi_i : X_i \to Y_i)_{i=1,\dots,n}$ をホモトピー同値写像の有限列とする．

このとき，

$\prod_i \phi_i : \prod_i X_i \to \prod_i Y_i,\ (x_i)_i \mapsto (\phi_i(x_i))_i$

はホモトピー同値

準備： (Section 4 でやればよかった)　　追加スライド

Prop 5.1.8: $(X_i)_{i=1,\dots,n}$, $(Y_i)_{i=1,\dots,n}$: 位相空間の列とし,

各 i について $\phi_i, \psi_i \in C(X_i, Y_i)$

s.t. $\phi_i \sim_h \psi_i$ を fix.

このとき $\prod_i \phi_i \sim_h \prod_i \psi_i$

Hint　$H_i : X_i \times I \to Y_i$: ϕ_i から ψ_i へのホモトピー とするとき

$H : (\prod_i X_i) \times I \to \prod_i Y_i$, $((x_i)_i, t) \mapsto (H_i(x_i, t))_i$

を考えればよい.

追加スライド

Thm 5.1.7 の証明：

㊍ $\prod_i \phi_i : \prod_i X_i \to \prod_i Y_i$ がホモトピー同値.

各 i について $\phi_i : X_i \to Y_i$ はホモトピー同値なので

$\psi_i : Y_i \to X_i$: 連続 s.t. $\begin{cases} [\psi_i]\circ[\phi_i] = [id_{X_i}] \\ \text{かつ} \\ [\phi_i]\circ[\psi_i] = [id_{Y_i}] \end{cases}$

となるものがとれるのでとる.

㊍ $[\prod_i \psi_i]\circ[\prod_i \phi_i] = [id_{\prod X_i}]$.

かつ

$[\prod_i \phi_i]\circ[\prod_i \psi_i] = [id_{\prod Y_i}]$

仮定より

$\psi_i \circ \phi_i \sim_h \mathrm{id}_{X_i}$ ($\forall i$) なので

Prop 5.1.8 より $\prod_i (\psi_i \circ \phi_i) \sim_h \prod_i \mathrm{id}_{X_i}$

追加スライド

ここで $\prod_i (\psi_i \circ \phi_i) = (\prod_i \psi_i) \circ (\prod_i \phi_i)$

$\prod_i \mathrm{id}_{X_i} = \mathrm{id}_{\prod_i X_i}$

となる（詳細略）

ので

$$(\prod_i \psi_i) \circ (\prod_i \phi_i) \sim_h \mathrm{id}_{\prod_i X_i}$$

特に $[\prod_i \psi_i] \circ [\prod_i \phi_i] = [\mathrm{id}_{\prod_i X_i}]$.

追加スライド

同様に $\left[\prod_i \phi_i\right] \circ \left[\prod_i \psi_i\right] = \left[\mathrm{id}_{\prod_i Y_i}\right]$ も示せる $\boxtimes$

追加スライド

Remark Thm 5.1.7, Prop 5.1.8 は "無限直積" version

で考えても問題なく成立する.

ただし "無限直積位相" の定義に注意.

§5.2：可縮空間

Def 5.2.1：1点とホモトピー同値な位相空間を可縮(contractible)という.

Ex 5.2.2：

$\mathbb{R}$, $(-1,1)$, $[-1,1]$, $\{0\}$ は可縮 (cf. Ex 5.1.5)

Ex 5.2.3: S^1は可縮?

結論として"S^1は可縮でない".

後で"基本群"を使って示す.

追加スライド

Thm 5.2.4：可縮空間たちの有限直積は可縮

i.e. ${}^{\forall}\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$: 可縮空間の有限列，

$\prod_{i=1}^{n} X_i$ は可縮.

($\because$ Thm 5.1.7)

追加スライド

Ex 5.2.5

$\mathbb{R}^n$, $(-1,1)^n$, $[-1,1]^n$ は可縮.

追加スライド

Def 5.2.6 : $S \subset \mathbb{R}^n$ が星状集合 (star-set)

$\underset{\text{def}}{\iff}$ $\exists x_0 \in S$ s.t. $\forall x \in S$

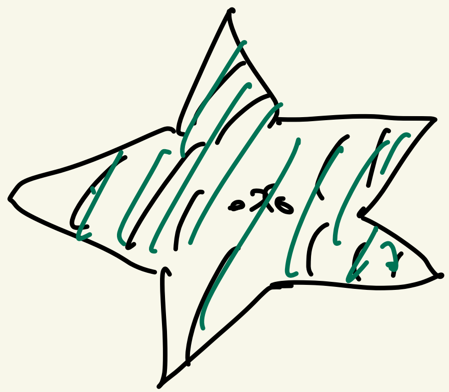
$$\overline{x_0 x} \subset S$$

x_0 と x を結ぶ $\mathbb{R}^n$ 内の線分

$\left(:= \{ tx + (1-t)x_0 \mid t \in I \}. \right)$

Thm 5.2.7 : 星状集合は可縮

← 相対位相



Hint : $\varphi : \{x_0\} \to S,\ x_0 \mapsto x_0,$

$H : S \times I \to S,\ (x, t) \mapsto tx + (1-t)x_0$

追加スライド

Ex 5.2.8 : $r > 0$ とする.

$$B^n_r := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 < r \} \subset \mathbb{R}^n$$

や

$$D^n_r := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r \} \subset \mathbb{R}^n$$

は星状.

特に可縮.

§5.3 弱変形レトラクト

設定 A, X: 位相空間

$\iota : A \hookrightarrow X$: 中への同相

(i.e. 単射で 相対位相

$A \to \iota(A)$ が同相

$a \mapsto \iota(a)$)

Def 5.3.2 : (A, ι) が X の弱変形レトラクト

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists f : X \to A$: 連続

s.t. $f \circ \iota = id_A$ かつ

$\iota \circ f \simeq_h id_X$

Prop 5.3.3 : 弱変形レトラクト $\iota : A \hookrightarrow X$ は

ホモトピー同値

例を追加

Ex 5.3.4 : ◎ $\{0\} \hookrightarrow [-1,1] \hookrightarrow \mathbb{R}$

は いずれも 弱変形レトラクト

◎ $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ は 弱変形レトラクト

◎ $D^n_r \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ は 弱変形レトラクト

◎ $(-1,1) \hookrightarrow [-1,1]$

や

$(-1,1) \hookrightarrow \mathbb{R}$

や

$B^n_r \hookrightarrow \mathbb{R}^n$

は ホモトピー同値だが

弱変形レトラクトではない.

追加スライド

Thm 5.3.5

"弱変形レトラクトは合成で閉じる"

すなわち $(A, \tau : A \hookrightarrow B)$

$(B, \sigma : B \hookrightarrow C)$ が共に

弱変形レトラクトであるとき,

$(A, \sigma \circ \tau : A \hookrightarrow C)$ も弱変形レトラクト

追加スライド

Thm 5.3.6：弱変形レトラクトたち の有限直積は弱変形レトラクト

i.e. $\forall\,(A_i,\ \iota_i : A_i \hookrightarrow X_i)_{i=1,\cdots,n}$: 弱変形レトラクト,

$\left(\prod_i A_i,\ \prod_i \iota_i : \prod_i A_i \hookrightarrow \prod_i X_i\right)$: 弱変形レトラクト

（詳細略）