§6：ホモトピー類を調べるための基礎テクニック

やること：$[X, Y]$ を調べたいときに使う基礎テクニックを2つ紹介する.

（X, Y：位相空間）

① $X \simeq_h X'$, $Y \simeq_h Y'$ のとき

$$[X, Y] \underset{1:1}{\longleftrightarrow} [X', Y']$$

② $[X, Y] \to \mathrm{Map}(X/\mathrm{path}, Y/\mathrm{path})$

弧状連結成分によるホモトピー不変量

§6.1：ホモトピー類とホモトピー同値

設定：X, Y, X', Y'：位相空間

s.t. $X \simeq_h X'$, $Y \simeq_h Y'$

Thm 6.1.1：$X \xleftarrow{\psi_{X'}} X'$, $Y \xrightarrow{\phi_Y} Y'$ をそれぞれホモトピー同値とする．

このとき $[X, Y] \to [X', Y']$

$[\xi] \mapsto [\phi_Y] \circ [\xi] \circ [\psi_{X'}]$

は全単射

Hint：逆写像を作る

Ex 6.1.2 : Y が可縮なら

$[X, Y] \overset{1:1}{\longleftrightarrow} [X, \{*\}]$ （$\{*\}$ は一点空間）

← これは 1 点

つまり $\forall \phi, \psi \in C(X, Y)$ について $\phi \sim_h \psi$.

後で Def 紹介

↓

Ex 6.1.3 : X が可縮なら

$[X, Y] \overset{1:1}{\longleftrightarrow} [\{*\}, Y] \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{Y \text{の弧状連結成分}\}$

↗ 演習問題 12

Ex 6.1.4 :

$[S^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}] \overset{1:1}{\longleftrightarrow} [S^1, S^1]$

Recall : $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \simeq_h S^1$

$\left(\text{ex} : y \mapsto \dfrac{y}{\|y\|} \right)$

メモ $\begin{matrix} \phi \\ \psi \end{matrix} : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ x \mapsto \begin{matrix} x \\ (0,1) \end{matrix}$ について

$[\phi] \neq [\psi]$ を示したければ

$\phi' = id_{S^1}$, $\psi' : S^1 \to S^1,\ x \mapsto (0,1)$ について

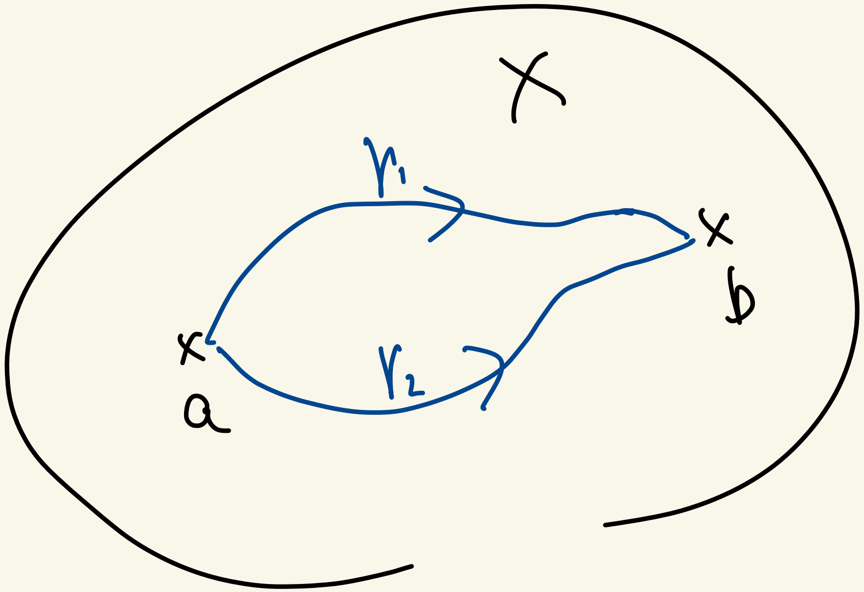
$[\phi'] \neq [\psi']$ を示せば十分

§6.2：弧状連結成分のホモトピー不変量

Def 6.2.1：X：位相空間，$a, b \in X$ について

$$\mathrm{Path}(X, a, b) := \left\{ \gamma \in C(\underset{[0,1]}{\overset{\shortparallel}{I}}, X) \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma(0) = a, \\ \gamma(1) = b \end{array} \right\}$$

とおく．



Prop 6.2.2: X：位相空間，$a, b, c \in X$ とする．

(1) $\gamma_0^{a,a} : I \to X,\ s \mapsto a$ とおくと，$\gamma_0^{a,a} \in \mathrm{Path}(X, a, a)$

(2) 各 $\gamma \in \mathrm{Path}(X, a, b)$ について

$\bar{\gamma} : I \to X,\ s \mapsto \gamma(1-s)$ とおくと，$\bar{\gamma} \in \mathrm{Path}(X, b, a)$

(3) 各 $\gamma^{a,b} \in \mathrm{Path}(X, a, b)$，$\gamma^{b,c} \in \mathrm{Path}(X, b, c)$ について

$$\gamma^{b,c} * \gamma^{a,b} : I \to X,\ s \mapsto \begin{cases} \gamma^{a,b}(2s) & (\text{if } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}) \\ \gamma^{b,c}(2s-1) & (\text{if } \frac{1}{2} \leq s \leq 1) \end{cases}$$

とおくと，$\gamma^{b,c} * \gamma^{a,b} \in \mathrm{Path}(X, a, c)$．

(3) の Hint：貼り合わせ補題

Def 6.2.3 : 位相空間 X において 二項関係 $\sim_{path}$ を

$$x \sim_{path} y \underset{def}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}\gamma \in Path(X, x, y)$$

$$\left(\text{i.e. } Path(X, x, y) \neq \emptyset \right)$$

として定める.

Prop 6.2.4 : "$\sim_{path}$" は X 上の同値関係

(Hint : Prop 6.2.2)

$\sim_{path}$ の同値類を弧状連結成分という $\subset X$

各 $x \in X$ を含む弧状連結成分を

$$[x]_{path} := \{ x' \in X \mid x \sim_{path} x' \} \subset X$$

と書く.

$X/\sim_{path}$ を $X/path$ と書く.

Thm 6.2.5 : X, Y : 位相空間とする.

$$[X, Y] \to \mathrm{Map}(X/\mathrm{path}, Y/\mathrm{path})$$

$$[\phi] \mapsto \left(\begin{array}{ccc} \phi_{\mathrm{path}} : X/_{\mathrm{path}} & \to & Y/\mathrm{path} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [x]_{\mathrm{path}} & \mapsto & [\phi(x)]_{\mathrm{path}} \end{array} \right)$$

は well-defined.

Hint : 4ステップ 証明

① 各 $\phi \in C(X, Y)$ について

$$\phi_{path} : X/_{path} \to Y/_{path} , \ [x] \mapsto [\phi(x)]$$

は well-defined

② $\phi, \psi \in C(X, Y)$ という $\phi \sim_h \psi$ のとき

$$\phi_{path} = \psi_{path} : X/_{path} \to Y/_{path}$$

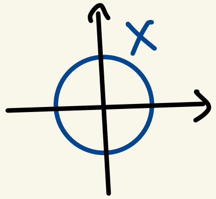
Ex 6.2.6 : 各 $r>0$, $c \in \mathbb{R}^2$ について

$S^1_r(c) :=$ 半径 r, 中心 c の円周 $\subset \mathbb{R}^2$

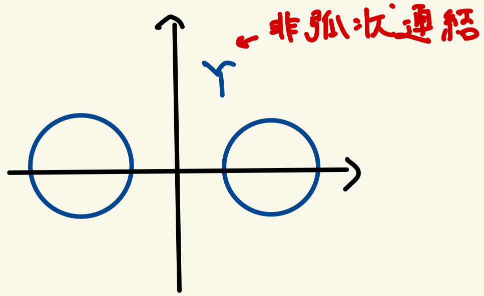
$\left(= \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - c\| = r \} \right)$

とおく.

$X = S^1_1((0,0))$ (S^1 といままで書いていた)



$Y = S^1_1((-2,0)) \cup S^1_1((2,0))$ とおく.



$X/\text{path} = \{ S^1_1((0,0)) \}$ (1点集合)

$Y/\text{path} = \{ S^1_1((-2,0)), S^1_1((2,0)) \}$ (2点集合)

となる.

$\phi, \psi, \xi \in C(X, Y)$ を

$$\phi(x) = x + (-2,0)$$

$$\psi(x) = x + (2,0) \quad (x \in S^1_1((0,0))$$ として定める.

$$\xi(x) = (-2,1)$$

このとき $\phi_{path}, \psi_{path}, \xi_{path} : \underset{\{S^1_1((0,0))\}}{\overset{}{X}}/_{path} \to \underset{\{S^1_1((-2,0)), S^1_1((2,0))\}}{Y}/_{path}$ は

$$\phi_{path}(S^1_1((0,0))) = S^1_1((-2,0)), \quad \psi_{path}(S^1_1((0,0))) = S^1_1((2,0))$$

$$\phi_{path}(S^1_1((0,0))) = \xi_{path}(S^1_1((0,0)))$$

特に $\phi_{path} \neq \psi_{path} \neq \xi_{path}$.

これより $[\phi] \neq [\psi] \neq [\xi]$ が示された

($\because$ Thm 6.2.5)

注意： $\phi_{path} = \xi_{path}$ は成り立つが，

ここから "$[\phi] = [\xi]$" は帰結できない．

(Thm 6.2.2 の対応は単射でない)

実際この場合 $[\phi] \neq [\xi]$ である

(証明は基本群を使えばできる)

Ex 6.2.7 : Y : 弧状連結のとき

Y/path は 1点なので

$[X, Y] \to \underbrace{\mathrm{Map}(X/\text{path}, Y/\text{path})}_{1点}$ からは

何の情報も引きだせない。

以降主に

X, Y : 弧状連結 のとき

$[X, Y]$ をどうやって調べるか?

を考えたい。