§7：位相空間の三つ組

やること：“位相空間の三つ組”

の間の連続写像とそのホモトピー類

を Def

（Sections 3, 4 の一般化）

（ Section 8 ↪ 基本群の Def，関手性 ）

§7.1：位相空間の三つ組の間の連続写像

Def 7.1.1：

(X, A_1, A_2) が

位相空間の三つ組 (triad of spaces)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ X：位相空間

$A_1, A_2 \subset X$：部分集合の pair.

省略記号

- $A_2 = \emptyset$ のとき $(X, A_1, \emptyset)$ を単に (X, A_1) と書き、空間対 (pair of spaces) と呼ぶ。

- A_i が1点集合 $A_i = \{x_i\}$ のとき、A_i を単に x_i と書くこともある。

つまり (X, x_1, x_2) は $(X, \{x_1\}, \{x_2\})$ の意味。

(X, x_0) は $(X, \{x_0\}) = (X, \{x_0\}, \emptyset)$ の意味。

Def 7.1.2:

(X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2): triads of spaces について

$$C((X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2)) := \{ \phi \in C(X, Y) \mid \phi(A_i) \subset B_i \ (i = 1, 2) \}$$

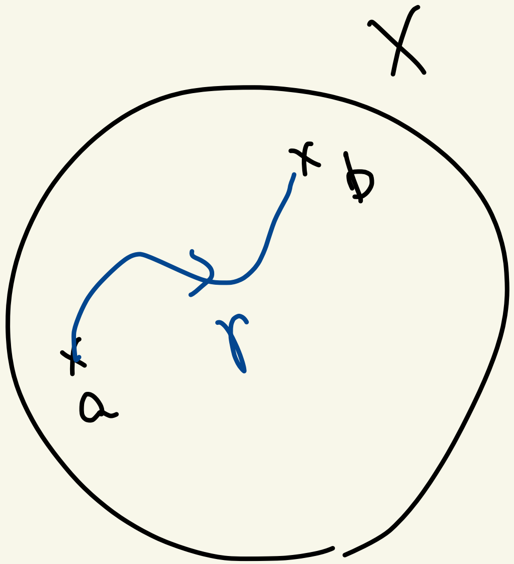
とおく.

Ex 7.1.3: X: 位相空間, $a, b \in X$ とする.

$$C((I, 0, 1), (X, a, b)) = \mathrm{Path}(X, a, b)$$

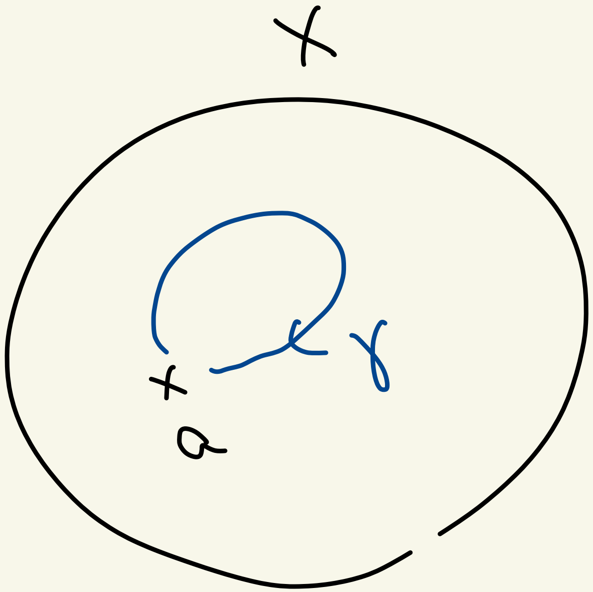
$$:= \left\{ \gamma \in C(I, X) \,\middle|\, \begin{array}{l} \gamma(0) = a, \\ \gamma(1) = b \end{array} \right\}$$

(Def 6.2.1)



$$
\begin{aligned}
\mathrm{Loop}(X, a) &:= \mathrm{Path}(X, a, a) \\
&= C((I, 0, 1), (X, a, a)) \\
&= C((I, \{0, 1\}), (X, a))
\end{aligned}
$$

とおく.



Thm 7.1.4: (X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2), (Z, C_1, C_2): triads of spaces とする.

$\phi \in C((X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2))$

$\psi \in C((Y, B_1, B_2), (Z, C_1, C_2))$ について

$\psi \circ \phi \in C((X, A_1, A_2), (Z, C_1, C_2))$

(easy)

Ex 7.1.5

$a_1, a_2 \in X$, $b_1, b_2 \in Y$ とする.

$\phi \in C((X, a_1, a_2), (Y, b_1, b_2))$

(i.e. $\phi : X \to Y$: 連続, $\phi(a_1) = b_1$ かつ $\phi(a_2) = b_2$)

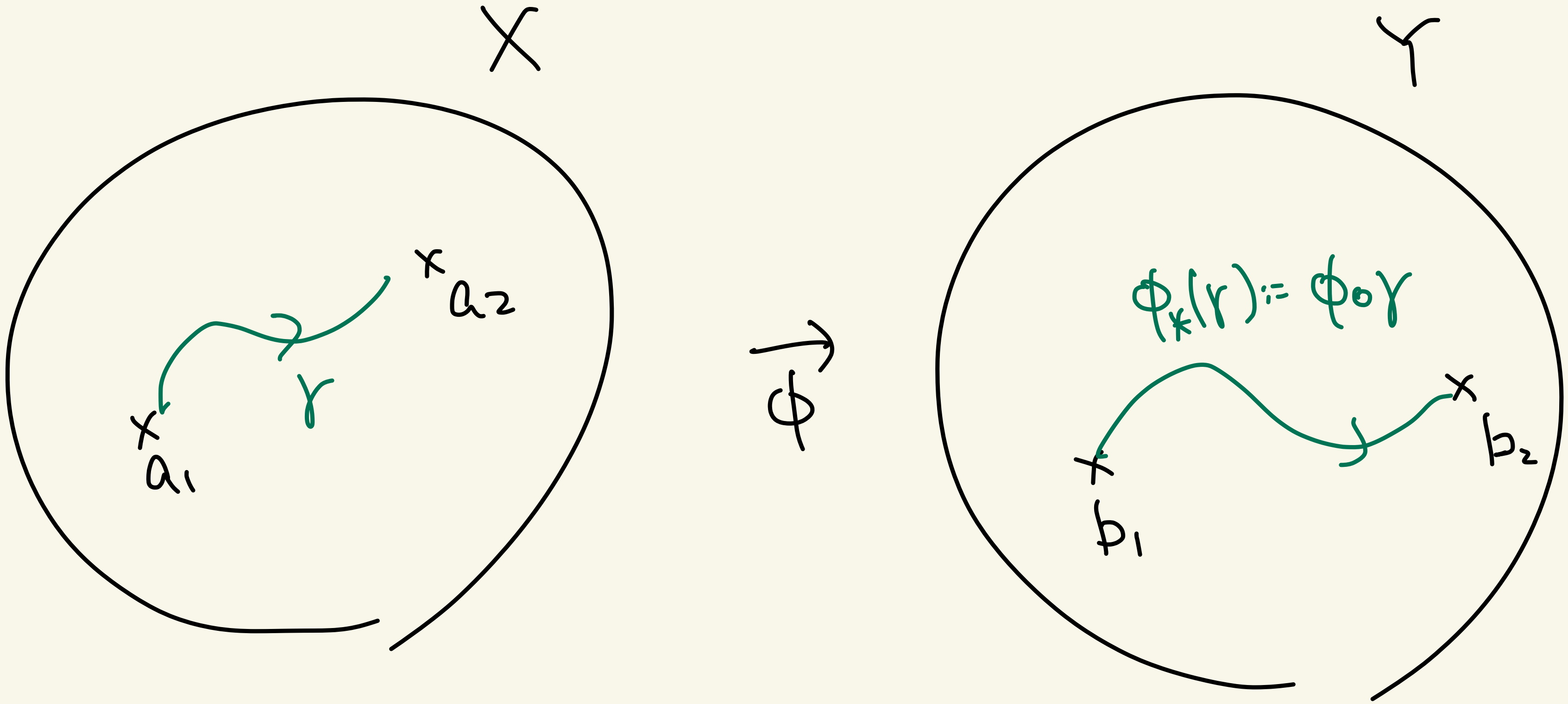
について

$$\phi_* : \mathrm{Path}(X, a_1, a_2) \to \mathrm{Path}(Y, b_1, b_2)$$

$$\gamma \mapsto \phi \circ \gamma$$

は well-defined

(Thm 6.2.2 の 4について 2項目 ① の精密版)


X
Y
a_1
a_2
γ
ϕ
$\phi_*(\gamma) := \phi \circ \gamma$
b_1
b_2

§7.2：ホモトピーとホモトピー類

設定

(X, A_1, A_2)

(Y, B_1, B_2) ： triads of spaces

Def 7.2.1： $\phi, \psi \in C((X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2))$ について

$H : X \times I \to Y$ が ϕ から ψ への

境界条件を満たすホモトピー

← この講義の独自用語

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\begin{cases} H \in C((X \times I, A_1 \times I, A_2 \times I), (Y, B_1, B_2)), \\ H(x, 0) = \phi(x) \quad (\forall x \in X), \\ H(x, 1) = \psi(x) \quad (\forall x \in X) \end{cases}$

Ex 7.2.2 :

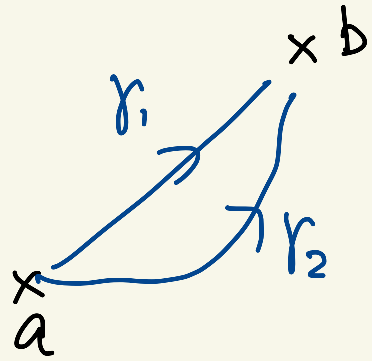
$a = (0,0) \in \mathbb{R}^2$,
$b = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ とし,

$\gamma_0, \gamma_1 \in \mathrm{Path}(\mathbb{R}^2, a, b) \ \left(= C((I,0,1),(\mathbb{R}^2,a,b))\right)$ を

$$\gamma_0 : I \to \mathbb{R}^2,\quad s \mapsto (s,s)$$

$$\gamma_1 : I \to \mathbb{R}^2,\quad s \mapsto (s,s^2)$$

として定める.



このとき $H : I \times I \to \mathbb{R}^2,\ (s,t) \mapsto (s,\ (1-t)s + ts^2)$

は γ_0 から γ_1 への境界条件を満たすホモトピー

$\left(H(0,t) = a,\ H(1,t) = b \quad \forall t \right)$

しかし

$$H' : I \times I \to \mathbb{R}^2,$$

$$(s,t) \mapsto \left(s - t(t-1),\ (1-t)s + ts^2 \right)$$

とすると H' は γ_0 から γ_1 へのホモトピーだが、

"境界条件はみたさない"

$\left(H'(0,t) = a,\ H'(1,t) = b \right)$ $\forall t$

実際、$t = \frac{1}{2}$ において

$$H'\left(s, \tfrac{1}{2}\right) = \left(s - \tfrac{1}{4},\ \tfrac{s+s^2}{2} \right)$$ となるので

$$H'\left(0, \tfrac{1}{2}\right) = \left(-\tfrac{1}{4}, 0\right) \neq a = (0,0)$$

Thm 7.2.3 : $C((X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2))$ 上の

二項関係 $\sim_{h.b}$ を

~ bounded condition

$\varphi \sim_{h.b} \psi \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}H$: 境界条件を満たすホモトピー from φ to ψ

とおくと、これは同値関係。

(Thm 4.1.2 の一般化

Thm 3.2.1 の"境界条件つき"版を準備すればよい)

各 $\phi \in C((X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2))$ の

$\sim_{h.b.c}$ による同値類（境界条件付きホモトピー類と呼ぶ）

を $[\phi]_b$ と書く，

i.e. $[\phi]_b := \{ \phi' \in C((X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2)) \mid \phi' \sim_{h.b.} \phi \}$

また $[(X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2)]_b := C((X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2)) / \sim_{h.b.}$

とおく．

Thm 4.2.1 の一般化

Thm 7.2.4: (X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2), (Z, C_1, C_2): triads of spaces とする.

このとき

$$[(Y,B_1,B_2),(Z,C_1,C_2)]_b \times [(X,A_1,A_2),(Y,B_1,B_2)]_b \to [(X,A_1,A_2),(Z,C_1,C_2)]_b$$

$$([\phi_2]_b \quad [\phi_1]_b) \mapsto [\phi_2]_b \circ [\phi_1]_b := [\phi_2 \circ \phi_1]_b$$

(境界条件付きホモトピー類の合成)

は well-defined

(Hint: Thm 3.2.2 を"境界条件つき" version で一般化し, それを使って証明する.)

Prop 7.2.5: Thm 7.2.4 の合成は結合的.

また $\{\mathrm{id}_X\}_b$ は単位的

恒等写像

Prop 4.2.2 の一般化

Ex 7.2.6

各位相空間 X, $a_1, a_2 \in X$, について

$$\pi(X, a_1, a_2) := \mathrm{Path}(X, a_1, a_2) / \sim_{h.b.}$$

$$\left(= [(I, 0, 1), (X, a_1, a_2)]_b \right)$$

とおく.

重要

位相空間　　Yの元

各 $\alpha \in [(X, a_1, a_2), (Y, b_1, b_2)]$ について

$$\alpha_* : \pi(X, a_1, a_2) \to \pi(Y, b_1, b_2)$$

$$[\gamma]_b \mapsto \alpha \circ [\gamma]_b := [\phi \circ \gamma]_b$$

（ただし $\phi \in \alpha$ ）

は well-defined

更に $c_1, c_2 \in Z$ としたとき

位相空間

$\alpha \in [(X, a_1, a_2), (Y, b_1, b_2)]_b$

$\beta \in [(Y, b_1, b_2), (Z, c_1, c_2)]_b$ について

$$(\beta \circ \alpha)_* = \beta_* \circ \alpha_*$$

as $\quad \pi(X, a_1, a_2) \to \pi(Z, c_1, c_2)$