§8：基本亜群，基本群

やること：基本亜群 および 基本群 の Def

§8.1：基本亜群，基本群の Def

設定：X：位相空間

記号：各 $a, b, c \in X$ について

Prop 6.2.2

- $\gamma_{id}^{a} \in \mathrm{Path}(X, a, a) = \mathrm{Loop}(X, a)$ を "$\gamma_{id}^{a}(s) = a$" で定める.
- 各 $\gamma \in \mathrm{Path}(X, a, b)$ について $\bar{\gamma} \in \mathrm{Path}(X, b, a)$ を "$\bar{\gamma}(s) = \gamma(1-s)$" で定める.
- 各 $\gamma^{a,b} \in \mathrm{Path}(X, a, b)$, $\gamma^{b,c} \in \mathrm{Path}(X, b, c)$ について $\gamma^{b,c} * \gamma^{a,b} \in \mathrm{Path}(X, a, c)$ を

$$\gamma^{b,c} * \gamma^{a,b}(s) = \begin{cases} \gamma^{a,b}(2s) & (0 \leq s \leq \frac{1}{2}) \\ \gamma^{b,c}(2s-1) & (\frac{1}{2} \leq s \leq 1) \end{cases}$$

で定める.

記号：各 $a, b \in X$ について

$$\Pi(X, a, b) := \mathrm{Path}(X, a, b)/\sim_{h.b.}$$ とおく.

直積とまぎらわしいので注意.

Section 7

<u>Thm 8.1.1</u>： $a, b, c \in X$ について

$$\Pi(X, b, c) \times \Pi(X, a, b) \to \Pi(X, a, c)$$

o bを含む

$$([\gamma^{b,c}]_b, [\gamma^{a,b}]_b) \longmapsto [\gamma^{b,c}]_b * [\gamma^{a,b}]_b$$

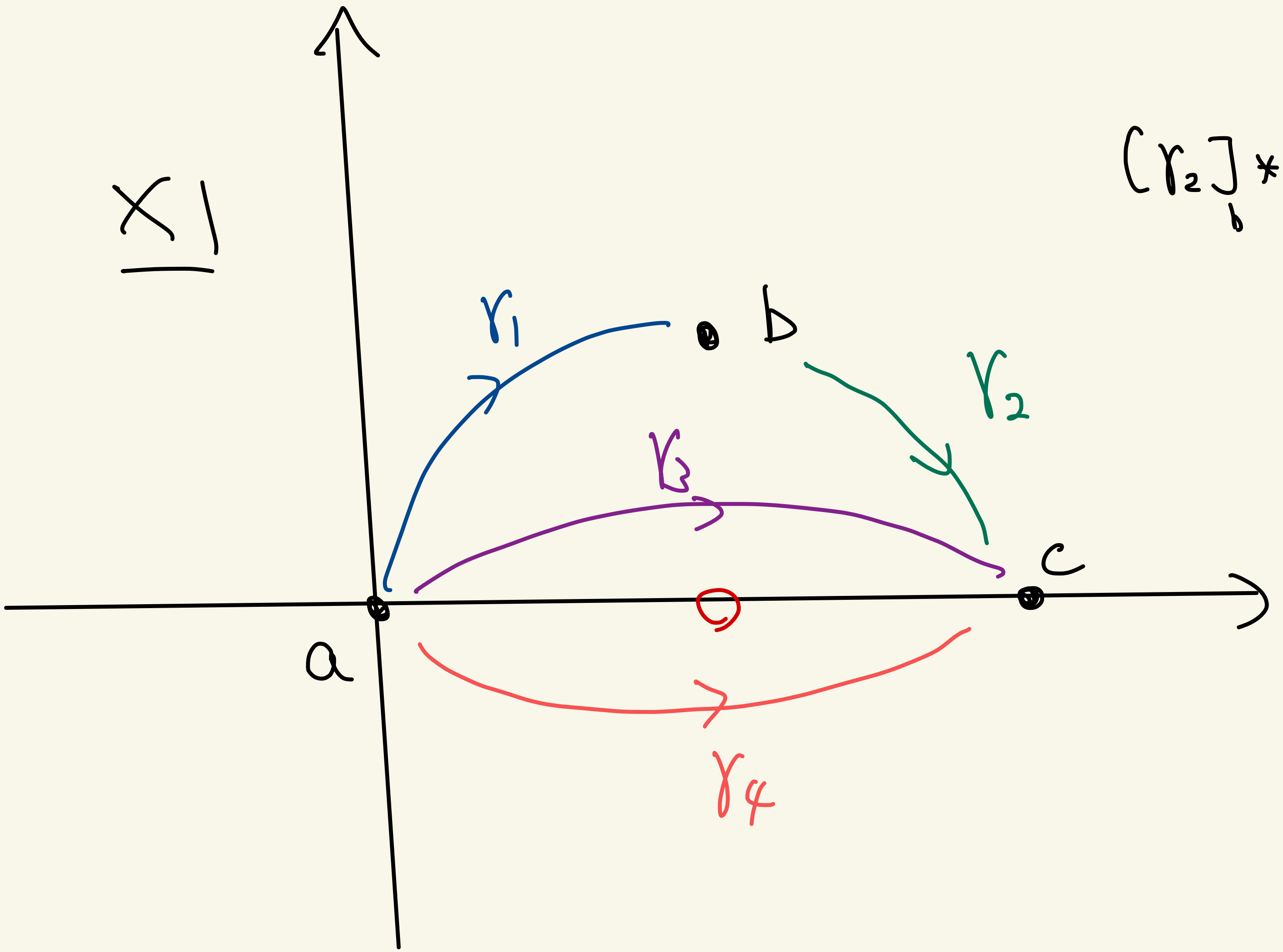
boundary condition

$$:= [\gamma^{b,c} * \gamma^{a,b}]_b$$

は well-defined.

イメージ1 : $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$ とする.

$a=(0,0)$, $b=(1,1)$, $c=(2,0)$

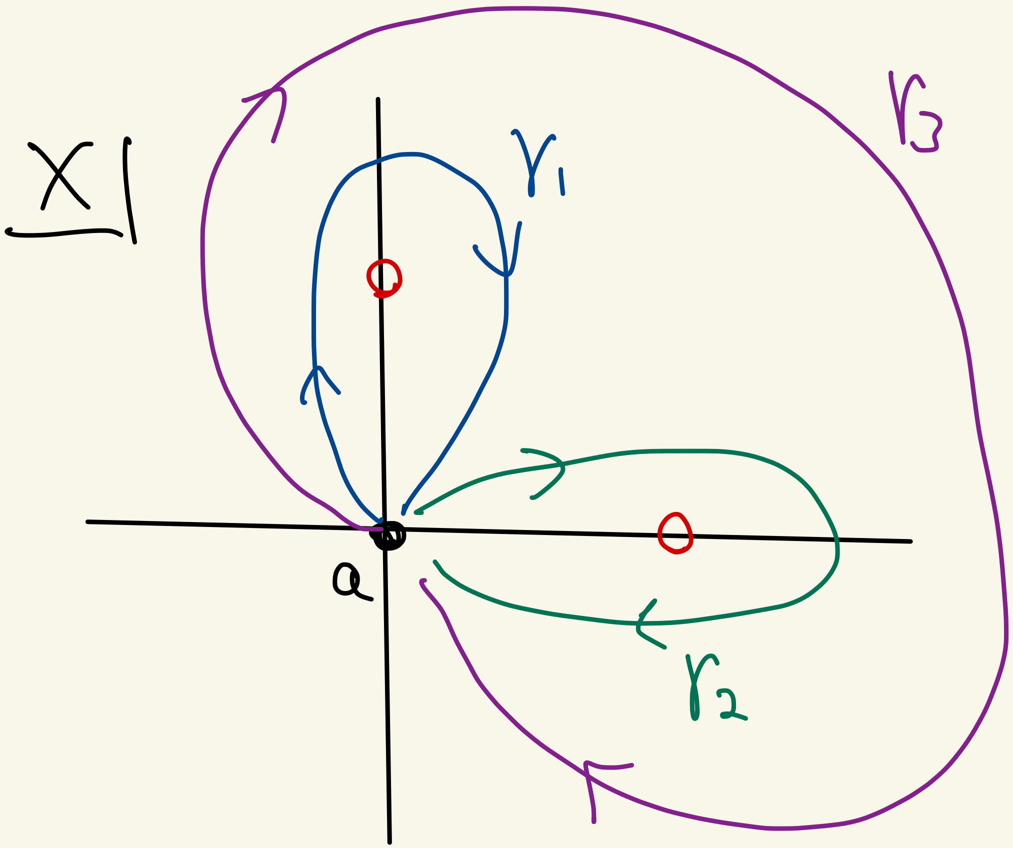


$$[\gamma_2]_b * [\gamma_1]_b = [\gamma_3]_b \neq [\gamma_4]_b$$

(証明には基本群の基礎知識が必要.)

イメージ2

$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0), (0,1)\}$, $a = (0,0)$ とする.



$$[\gamma_2]_a * [\gamma_1]_a = [\gamma_3]_a$$

Thm 8.1.1の:

Hint $\gamma_1^{b,c} \sim_{h.b.} \gamma_2^{b,c}$, $\gamma_1^{a,b} \sim_{h.b.} \gamma_2^{a,b}$ について

H, G を境界条件を満たすホモトピー from $\gamma_1^{b,c}$, $\gamma_1^{a,b}$ to $\gamma_2^{b,c}$, $\gamma_2^{a,b}$ とする.

このとき

$$K : I \times I \to X, \ (s,t) \mapsto \begin{cases} G(2s,t) & (0 \leq s \leq \frac{1}{2}) \\ H(2s-1,t) & (\frac{1}{2} \leq s \leq 1) \end{cases}$$

とおけば K は境界条件を満たすホモトピー from $\gamma_1^{b,c} * \gamma_1^{a,b}$ to $\gamma_2^{b,c} * \gamma_2^{a,b}$

Prop 8.1.2: (1) "$*$" は結合的

(i.e. $\underline{[\gamma^{c,d}]_b * ([\gamma^{b,c}]_b * [\gamma^{a,b}]_b)} = \underline{([\gamma^{c,d}]_b * [\gamma^{b,c}]_b) * [\gamma^{a,b}]_b}$)

(2) "$*$" について $[\gamma^a_{id}]_b$ は単位的 ($\forall a \in X$)

(i.e. $\underline{[\gamma^{a,b}]_b * [\gamma^a_{id}]_b} = \underline{[\gamma^{a,b}]_b}$, $\underline{[\gamma^a_{id}]_b * [\gamma^{c,a}]_b} = \underline{[\gamma^{c,a}]_b}$)

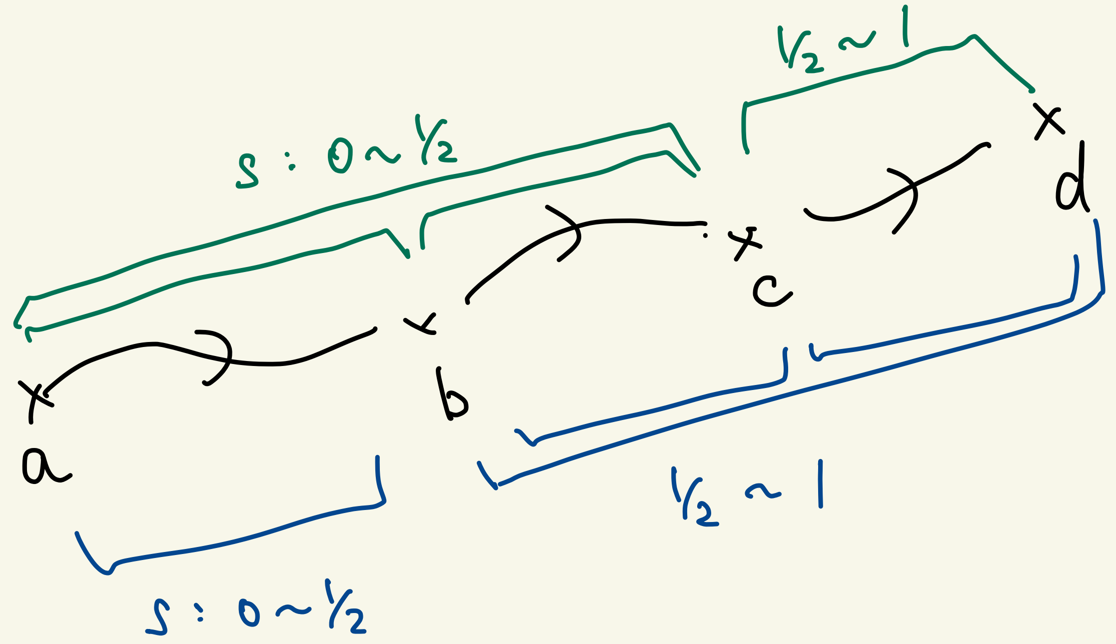
(3) 各$[\gamma^{a,b}]_b$に対して $[\overline{\gamma^{a,b}}]_b$は "$*$ についての逆元"

(i.e. $\underline{[\overline{\gamma^{a,b}}]_b * [\gamma^{a,b}]_b} = [\gamma^a_{id}]_b$, $\underline{[\gamma^{a,b}]_b * [\overline{\gamma^{a,b}}]_b} = [\gamma^b_{id}]_b$)

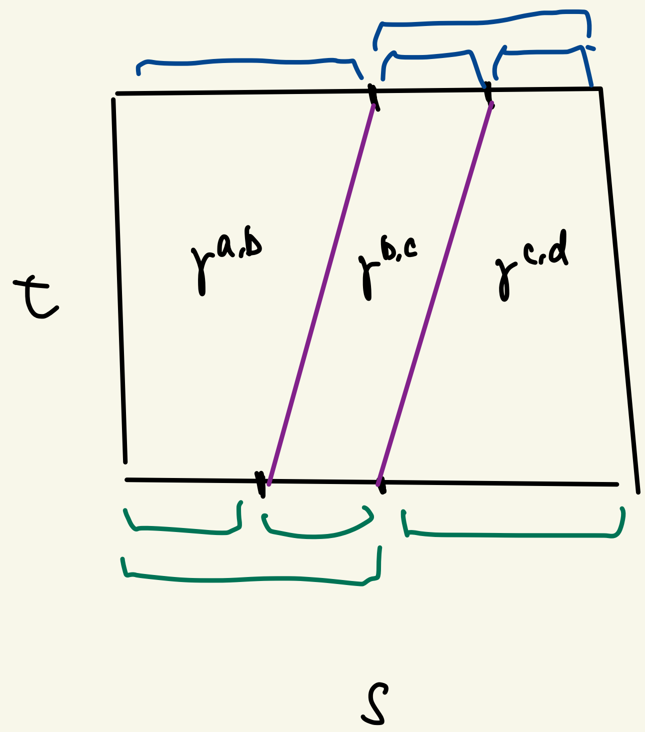
"単位元" at a　　"単位元" at b

Hint :

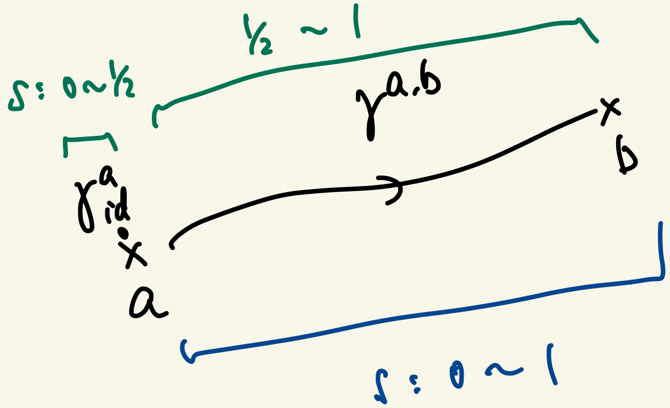
(1)



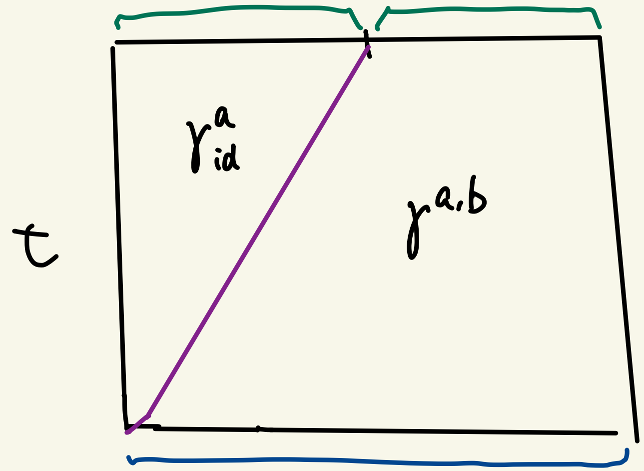
必要なホモトピー



(2)

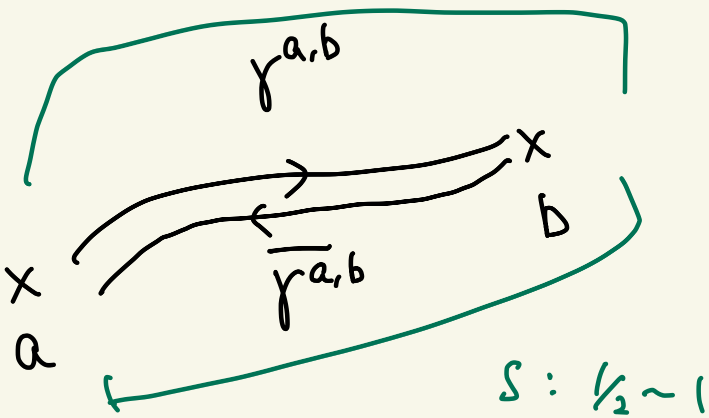


必要なホモトピー

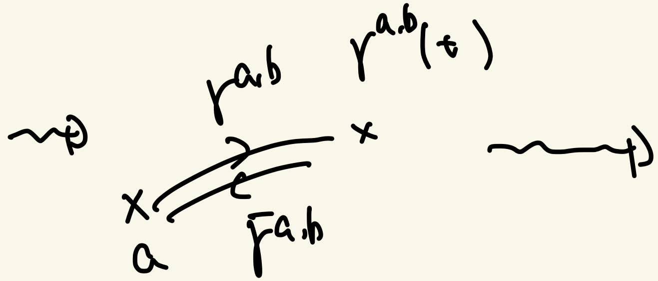


(3)

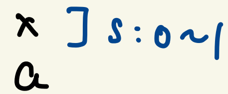
$\boxed{t=0}$



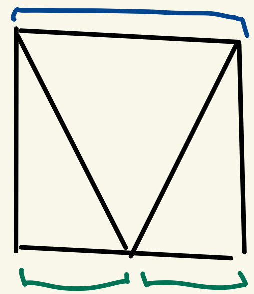
$\boxed{0 \leqq t \leqq 1}$



$\boxed{t=1}$



ホモトピーの Hint



Def 8.1.3 :

$\Pi(X) := \coprod_{a,b\in X} \Pi(X,a,b)$ を

X の基本亜群という.

(fundamental groupoid)

Remark :

" $*$ " について $\Pi(X)$ は "群もどき".

$*$ の定義域は $\Pi(X)\times\Pi(X)$ よりせまい

($\Pi(X) \underset{s,t}{\times} \Pi(X) := \coprod_{a,b,c\in X} \Pi(X,b,c)\times\Pi(X,a,b)$ とおくと,

$\underbrace{* : \Pi(X) \underset{s,t}{\times} \Pi(X) \to \Pi(X)}_{\text{条件付き二項演算}}$ と思える. 詳細はおまけ講義でやる)

Def 8.1.4: 各 $a \in X$ について

$\pi_1(X, a) := \Pi(X, a, a)$

$\left(= \mathrm{Loop}(X, a) / \sim_{h.b} \right)$

を X の a における基本群 (fundamental group) という

Thm 8.1.4: 各 $a \in X$ に対して

$\pi_1(X, a)$ は $*$ について群をなす.

($\because$ Prop 8.1.2)

Ex 8.1.5 :

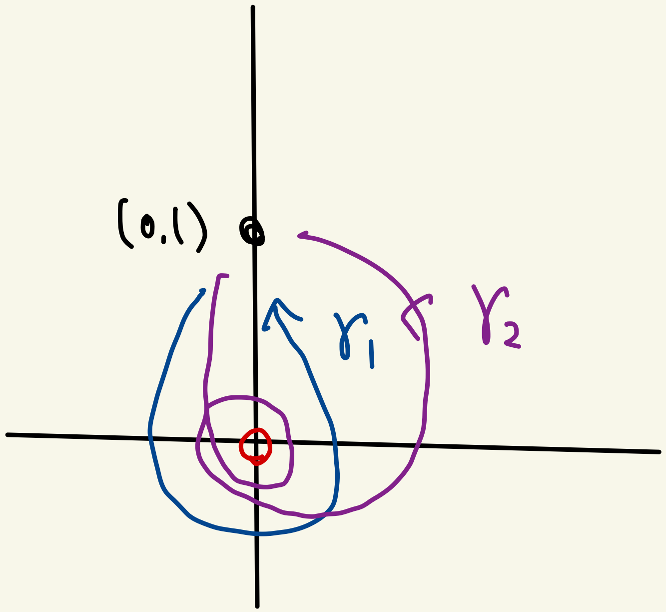
easy

$$\pi_1(\mathbb{R}^n, a) \cong \text{自明群} \quad (\forall a \in \mathbb{R}^n)$$

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, (0,1)) \cong \mathbb{Z}$$

後で示す

"何回原点のまわりをまわったか"を表す量



後の Section で次の定理を示す

Thm 8.1.6: X, Y: 位相空間,

$\phi: X \to Y$: ホモトピー同値

$a \in X$ とする,

このとき $\pi_1(X, a)$ と $\pi_1(Y, \phi(a))$ は群として同型

← いろいろ準備してから示す.

§8.2：基本群の基点のとり換え.

設定：X：位相空間

$a, b \in X$

記号：$\Pi(X) := \bigsqcup_{x,y \in X} \Pi(X, x, y)$ Xの基本亜群

$\pi_1(X, a) := \Pi(X, a, a)$ ：基本群 of (X, a)

$\pi_1(X, b) := \Pi(X, b, b)$ (X, b)

これから "$\pi_1(X, a)$ vs $\pi_1(X, b)$" を考えよ.

Thm 8.2.1 : $\Pi(X,a,b) \neq \emptyset$ とする $\left(\Leftrightarrow [a]_{path} = [b]_{path}\right)$

各 $[\gamma^{a,b}]_b \in \Pi(X,a,b)$ について

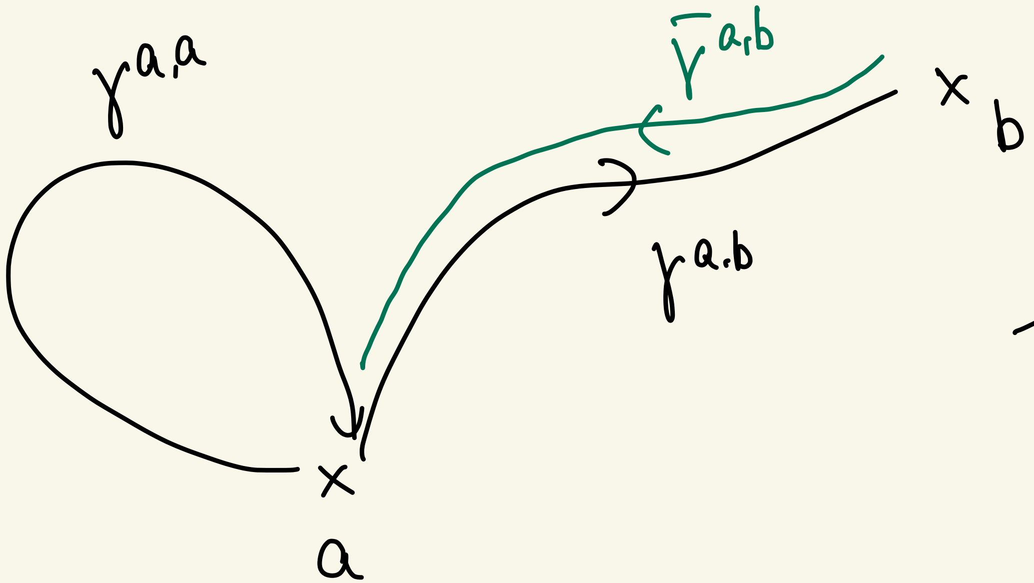
$$\begin{aligned} H_{[\gamma^{a,b}]_b} : \pi_1(X,a) &\to \pi_1(X,b) \\ \alpha &\mapsto [\gamma^{a,b}]_b * \alpha * [\overline{\gamma^{a,b}}]_b \end{aligned}$$

は群同型

(Hint : 準同型 : Prop 8.1.2
全単射 : 逆写像作る)

(注意 : この同型は $[\gamma^{a,b}]_b$ の選び方に依存する.)

イメージ



$$\rightsquigarrow \left[\gamma^{a,b} * \gamma^{a,a} * \overline{\gamma^{a,b}}\right]_b$$

$$\in \pi_1(X, b)$$

ついでに以下もみておく。

Prop 8.2.2:

$\beta \in \Pi(X, a, b)$ とする。

このとき

$$\overbrace{\pi_1(X, a)}^{\text{群}} \mapsto \overbrace{\Pi(X, a, b)}^{\text{群ではない}}$$

$$\alpha \mapsto \beta \circ \alpha$$

は全単射

Hint 逆写像を作る。

§ 8.3 : 単連結空間

Def 8.3.1 : 弧状連結空間 X が単連結 (simply-connected)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall a \in X$, $\pi_1(X, a)$ が自明群

Prop 8.3.2 : 空でない弧状連結空間 X について 以下は同値

(i) X は単連結

(ii) $\exists a_0 \in X$ s.t. $\pi_1(X, a_0)$ が自明群

(iii) $\forall a, b \in X$, $\pi(X, a, b)$ が 1点

($\because$ Prop 8.2.1, 8.2.2)

Ex 8.3.3 :

- $\mathbb{R}^n$ は単連結. ← Ex 8.1.5
- S^1 は単連結でない ($\pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z}$ を Section 9 で示す)

Thm 8.1.6 を認めると次も言える (cf. 演習問題)

Thm 8.3.4 : 可縮空間は単連結

この定理の逆は成り立たない.

Ex 8.3.5 : S^n $(n \geq 2)$ は単連結だが可縮でない

演習問題 44

この講義では証明しない.
"ホモロジー論" を使えば示せる.