§9：S^1 の基本群

設定：$* \in S^1 := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

記述を簡単にするため

やること：$\pi(S^1, *) \cong \mathbb{Z}$ を示す！

この講義の山場の一つ

Memo：Thm 8.2.1 より $* = 1 \in S^1$ の場合だけ

考えれば十分.

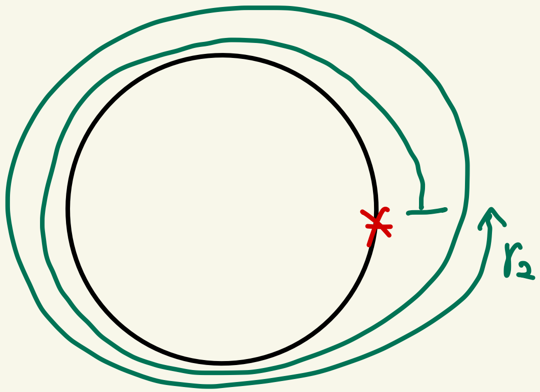
§9.1：証明の方針

設定：$S^1 := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

$* := 1 \in S^1$

記号：$\gamma_k : I \to S^1,\ s \mapsto \exp(2\pi i k s) = e^{2\pi i k s}$

$\in \mathrm{Loop}(S^1, *)$



Prop 9.1.1 :

$$\tau : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, *)$$

$$k \mapsto [\gamma_k]_b$$

は群準同型

Hint : Lem 9.1.2 :

$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $\gamma_{k_1} * \gamma_{k_2} \sim_{h.b} \gamma_{k_1+k_2}$

これから証明したい定理

Thm 9.1.3 :

$\tau : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, *)$ は全単射.

特に Prop 9.1.1 より 群同型.

方針:

$$\pi : \mathbb{R} \to S^1, \quad \theta \mapsto \exp(2\pi i\theta) = e^{2\pi i\theta}$$

とおく.

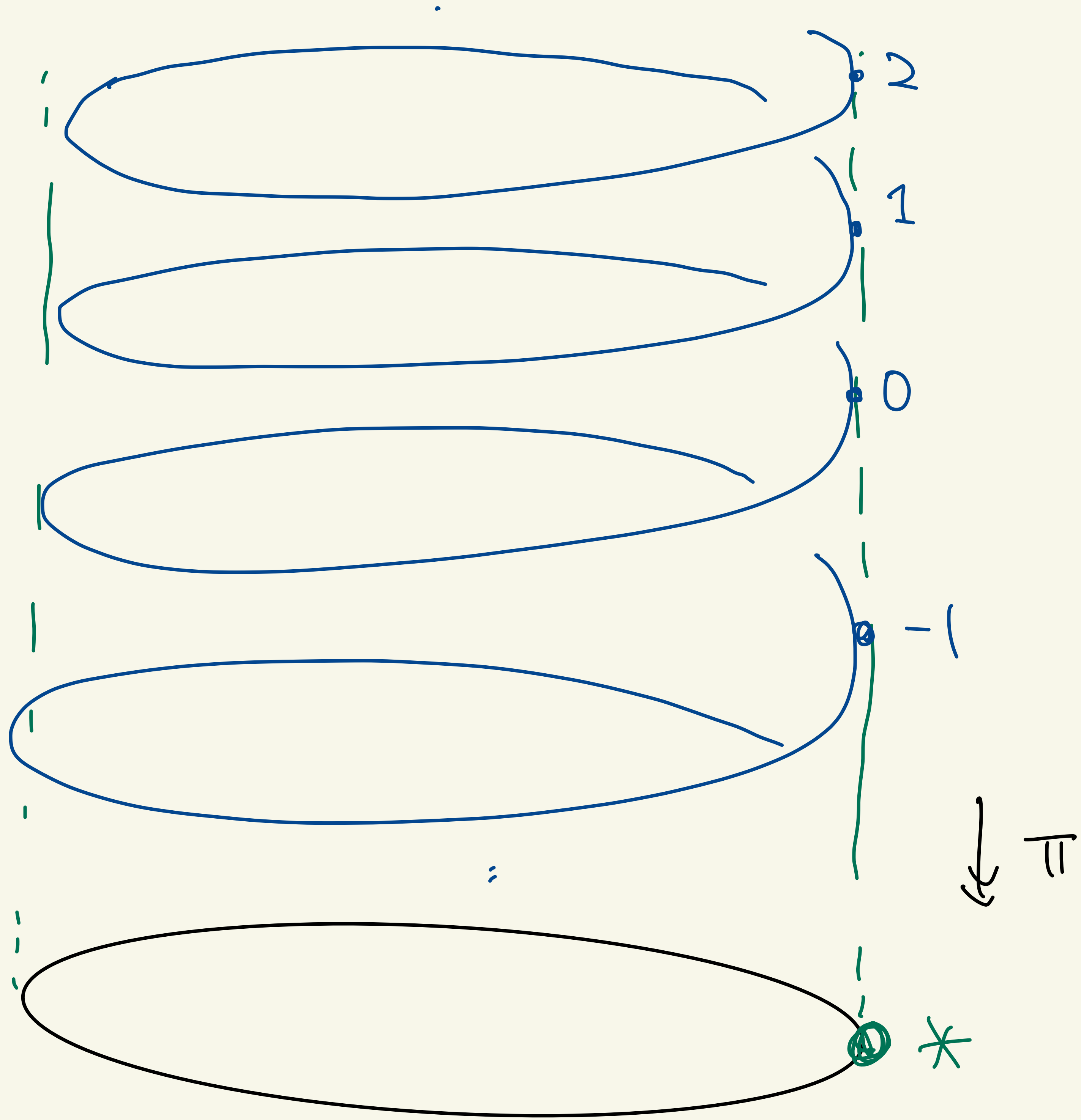
$\pi^{-1}(\{1\}) = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ に注意

Remark: π は "S^1 の普遍被覆" と呼ばれる

非常によい写像

後で一般的に def する

イメージ



まず次が成り立つ:

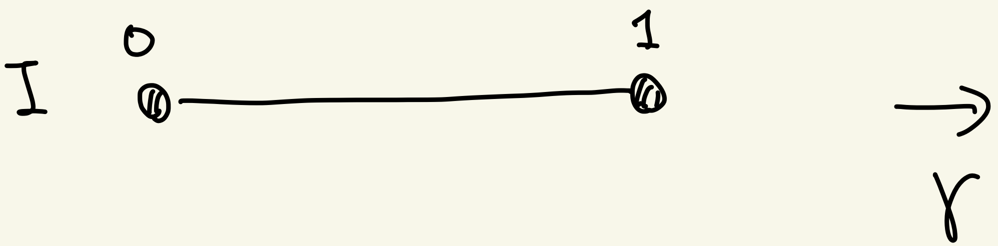
Prop 9.1.4:

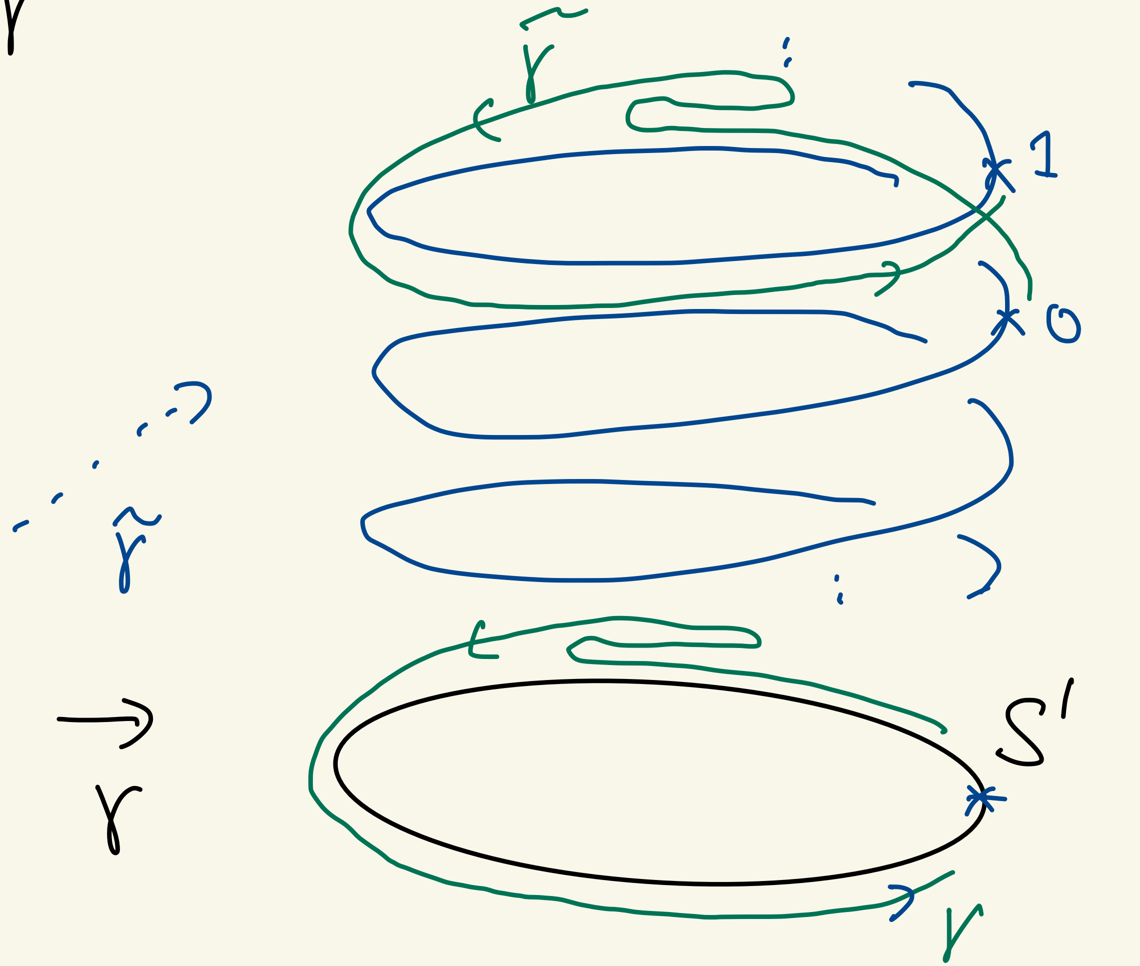
$\forall \gamma \in \mathrm{Loop}(S^1, *),\ \exists!\ \hat{\gamma} \in \mathrm{Path}(\mathbb{R}, 0, \mathbb{Z})$ ← γ の lift

$:= C((I,0,1),(\mathbb{R},0,\mathbb{Z}))$

s.t. $\pi \circ \hat{\gamma} = \gamma$

証明後まわし





Lem 9.1.5: $\tilde{\gamma}_k(1) = k \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$

$\left(\because \ \tilde{\gamma}_k : I \to \mathbb{R},\ s \mapsto ks \right.$ とおくと

$\tilde{\gamma}_k \in \mathrm{Path}(\mathbb{R}, 0, \mathbb{Z})$ かつ $\pi \circ \tilde{\gamma}_k = \gamma_k$

で、$\left. \tilde{\gamma}_k(1) = k. \right)$

次のPropがThm 9.1.3のカギ：

Prop 9.1.6：$\gamma, \gamma' \in \mathrm{Loop}(S^1, *)$とする.

このとき次は同値

(i) $[\gamma]_b = [\gamma']_b$

$\Updownarrow$

(ii) $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$ in $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

Prop 9.1.4, Prop 9.1.6 を認めて Thm 9.1.3 を示す.

Pf of Thm 9.1.3 :

単射性 : $\tau(k) = \tau(\ell)$ として, $k = \ell$ を示す.

$[\gamma_k]_b = [\gamma_\ell]_b$ となるので

Prop 9.1.6 より $\hat{\gamma}_k(1) = \hat{\gamma}_\ell(1)$.

k 〃 ℓ.

全射性 : $\forall \gamma \in \mathrm{Loop}(S^1, *)$ をとる. $k := \hat{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$ とおく.

$\hat{\gamma}_k(1) = k$ なので

Prop 9.1.6 より $\tau(k) = [\gamma_k]_b = [\gamma]$. 証

§9.2 ホモトピーの lift

以下の定理を認めて Prop 9.1.6 を示す.

記号: $\iota : I \to I \times I$, $t \mapsto (0,t)$ とおく.

設定: $f \in C(I, \mathbb{R})$

$H \in C(I\times I, S^1)$ with $\pi \circ f = H \circ \iota$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ I\times I \arrow[r, "H"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Prop 9.2.1: $\exists ! \tilde{H} \in C(I \times I, \mathbb{R})$

s.t. $\pi \circ \tilde{H} = H$ かつ $\tilde{H} \circ \iota = f$

Prop 9.1.6 (再掲): $\gamma, \gamma' \in \mathrm{Loop}(S^1, *)$ とする.

このとき 次は同値

(i) $[\gamma]_b = [\gamma']_b$

$\Updownarrow$

(ii) $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1)$ in $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

Hint of (i) ⇒ (ii): (i) を仮定して (ii) を示す.

$f: I \to \mathbb{R},\ t \mapsto 0$ とし,

$H: I \times I \to S^1$ を γ から γ' へのホモトピーとして Prop 9.2.1 を使うと

$\tilde{H} \in C(I \times I, \mathbb{R})$ であって $\tilde{\gamma}(s) = \tilde{H}(s, 0)$, $\tilde{\gamma}'(s) = \tilde{H}(s, 1)$ $({}^{\forall} s \in I)$ かつ

$\tilde{H}(1, t) \in \mathbb{Z} = \pi^{-1}(*)$ $({}^{\forall} t \in I)$ となるものがとれる.

$\mathbb{Z}$ の離散性と "$t \mapsto \tilde{H}(1, t)$" の連続性から $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{H}(1, 0) = \tilde{H}(1, 1) = \tilde{\gamma}'(1)$.

Hint of (ii) ⇒ (i)

(ii) を仮定して (i) を示す.

$k := \tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1) \in \mathbb{Z}$ とおく.

$\mathbb{R}$ は単連結 (∵ Ex 8.1.5) なので $\Pi(\mathbb{R}, 0, k)$ は一点 (∵ Prop 8.3.2).

特に $\tilde{\gamma} \sim_{h.b.} \tilde{\gamma}'$ となり

ホモトピー $\tilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ from $\tilde{\gamma}$ to $\tilde{\gamma}'$ がとれる.

$H := \pi \circ \tilde{H} : I \times I \to S^1$ とおけば,

これが γ から γ' へのホモトピーを定める.

@ Prop 9.1.4 (path lift) ← §9.6

と

Prop 9.2.1 (path homotopy の lift) ← §9.7

を示せば

Thm 9.1.3 ($\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \pi_1(S^1, *)$)

が示されたことになる.

メモ: §9.3 ~ 9.7 は後で復習 or 一般化するので,

それまでおいておいてもよい.

(講義ではたぶんとばす)

§9.3: Liftの一意性

やること: liftの一意性を示す.

設定: X: 位相空間
$a \in X$
$b \in \mathbb{R}$

記号: $c := \pi(b) \in S^1$

Def 9.3.1: 各 $l \in C((X,a),(\mathbb{R},b))$ について
$l_\pi := \pi \circ l \in C((X,a),(S^1,c))$ とおく.

また各 $h \in C((X,a),(S^1,c))$ について
$\tilde{h} \in C((X,a),(\mathbb{R},b))$ が h の lift であるとは,
$\tilde{h}_\pi = h$ となることとする.

Liftの一意性

Thm 9.3.2 X：連結とする．

このとき

$$C((X,a),(\mathbb{R},b)) \to C((X,a),(S^1,c))$$
$$l \mapsto l_\pi := \pi \circ l$$

は単射．

(i.e. 各 $h \in C((X,a),(S^1,c))$ について，
そのlift $\hat{h}$ は存在するなら一意)

Thm 9.3.2 の準備：

Prop 9.3.3

$$\mathbb{R} \underset{\pi}{\times} \mathbb{R} := \{ (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \pi(\theta_1) = \pi(\theta_2) \}$$

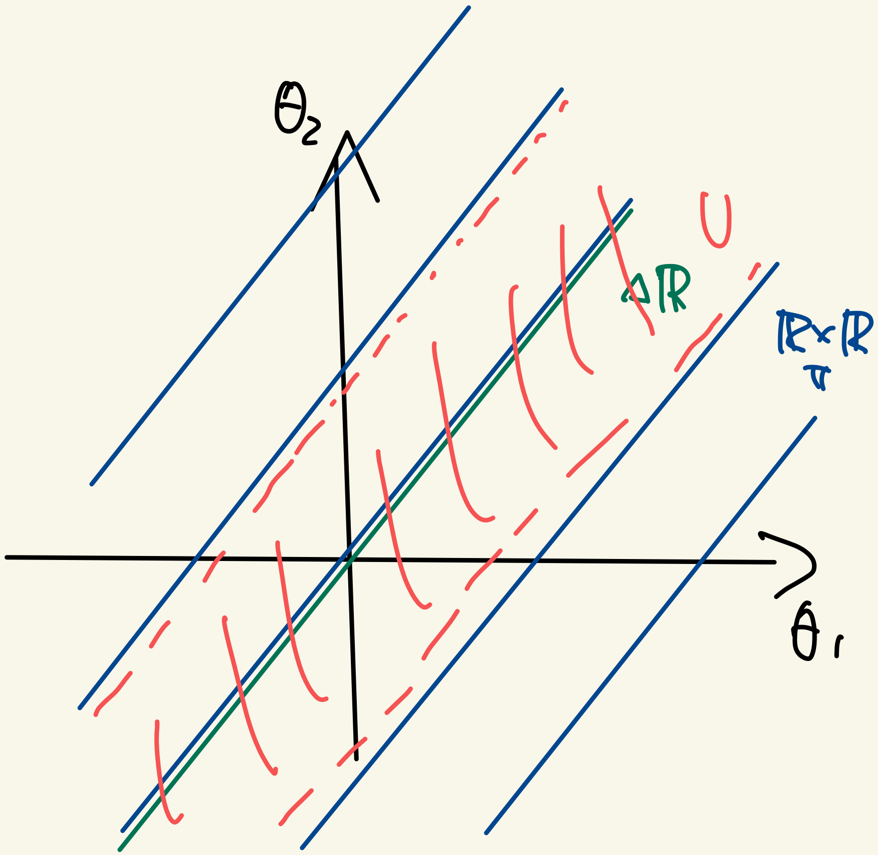
$$\Delta \mathbb{R} := \{ (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \theta_1 = \theta_2 \}$$

とおく。

このとき $\exists U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ s.t.

$$U \cap (\mathbb{R} \underset{\pi}{\times} \mathbb{R}) = \Delta \mathbb{R}$$

Hint : $U = \{ (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |\theta_1 - \theta_2| < 1 \}$ とおけばよい.



Thm 9.3.2 の Hint:

$l, l' \in C((X,a),(\mathbb{R},b))$ with $l_\pi = l'_\pi$ を fix

示 $l = l'$.

$X_0 := \{ x \in X \mid l(x) = l'(x) \}$ とおく.

示 $X_0 = X$

① $X_0 \neq \emptyset$ (Hint: $a \in X_0$ を示す)

Prop 9.3.3

② $X_0 \subset X$: closed (Hint $X_0 = (l \times l')^{-1}(\Delta\mathbb{R})$)

③ $X_0 \subset X$: open (Hint $X_0 = (l \times l')^{-1}(U)$ を示す)

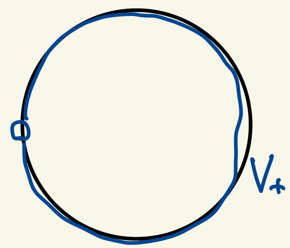
を示せばよい (X の連結性)

§9.4: π の local sections

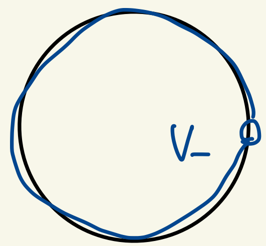
やること: local に lift を構成する.

記号: 以降 $V_\pm \underset{\text{open}}{\subset} S^1$ を

$$V_+ := S^1 \setminus \{-1\}$$



$$V_- := S^1 \setminus \{1\}$$



とおく.

このとき $\{V_+, V_-\}$ は S^1 の open cover.

Def 9.4.1 : 各 $\ell \in \mathbb{Z}$ について

$$\tilde{V}_+^\ell := \left(\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}\right) \underset{\pi}{\overset{\text{同相}}{\xrightarrow{\sim}}} V_+, \quad \theta \mapsto e^{2\pi i\theta}$$

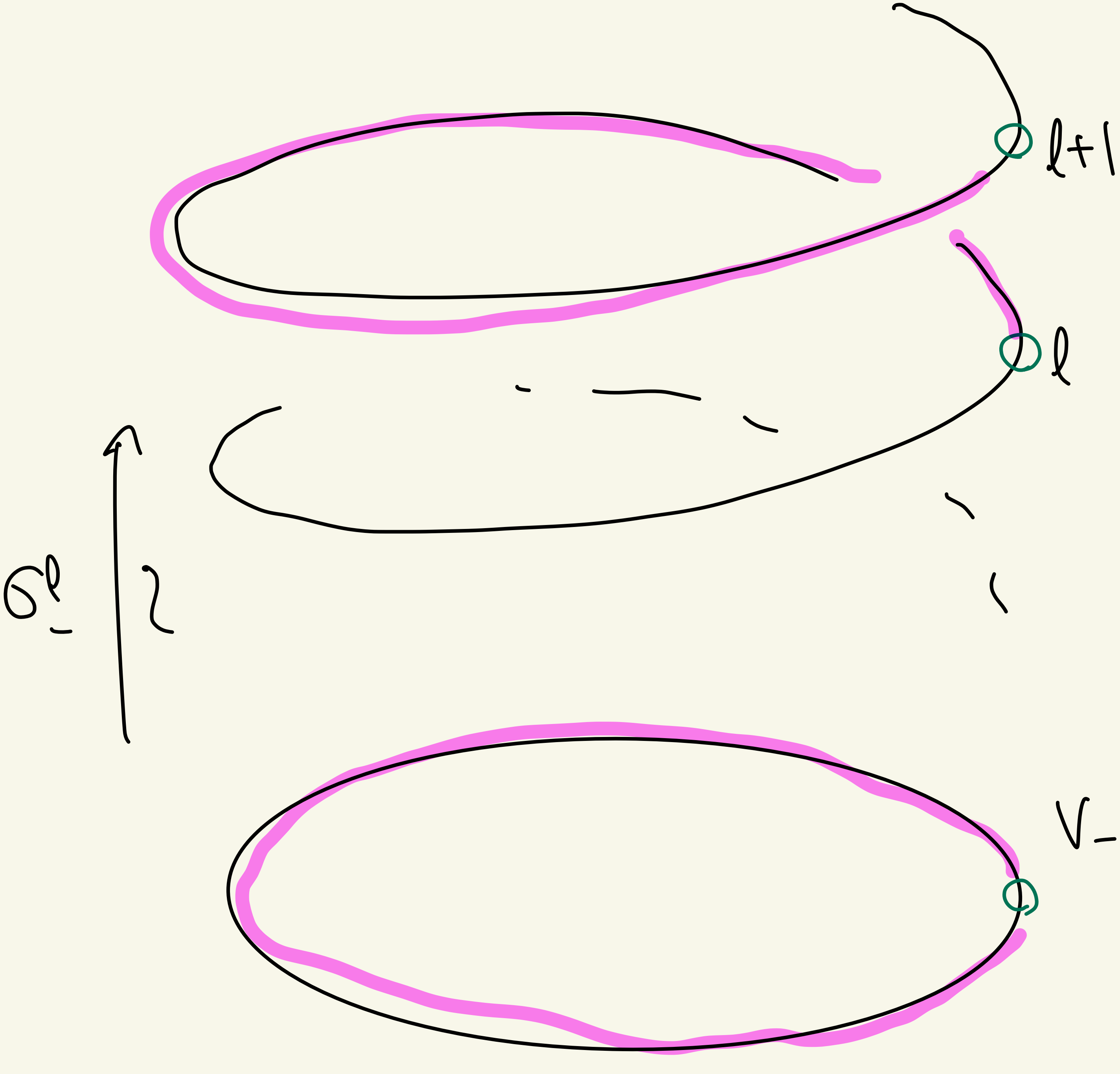
の逆写像を $\sigma_+^\ell : V_+ \underset{\text{同相}}{\xrightarrow{\sim}} \left(\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}\right) = \tilde{V}_+$ とおく.

また

$$\tilde{V}_-^\ell := (\ell, \ell + 1) \underset{\pi}{\overset{\text{同相}}{\xrightarrow{\sim}}} V_-, \quad \theta \mapsto e^{2\pi i\theta}$$

の逆写像を $\sigma_-^\ell : V_- \underset{\text{同相}}{\xrightarrow{\sim}} (\ell, \ell + 1) = \tilde{V}_-$ とおく.

("Log" の枝の話)



$\ell+1$
ℓ
σ_-^ℓ
$\wr$
V_-

local な lift の構成

Prop 9.4.2 X：位相空間

$A \subset X$：連結

$f \in C(A, \mathbb{R})$

$F \in C(X, S^1)$ とする.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\
X \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{F}, ?"] & S^1
\end{tikzcd}
$$

Assume $\exists \varepsilon \in \{+, -\}$ s.t. $F(X) \subset V_\varepsilon$

このとき $\exists \tilde{F} \in C(X, \mathbb{R})$

s.t. $\pi \circ \tilde{F} = F$ かつ $f = \tilde{F}|_A$.

← "F の image が小さい" とき lift 可能

Hint : A の連結性から $f(A) \subset \tilde{V}_\varepsilon$ となる $l \in \mathbb{Z}$ が存在する。

$$\tilde{F} := \sigma_\varepsilon^l \circ F$$ とおけばよい。

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \tilde{V}_\varepsilon \arrow[d, shift left, "\pi"] \\
X \arrow[r, "F"] & V_\varepsilon \arrow[u, shift left=3, "\sigma_\varepsilon^l"']
\end{tikzcd}$$

§9.5 : ルベーグ数

やること : global な path lift 構成の準備

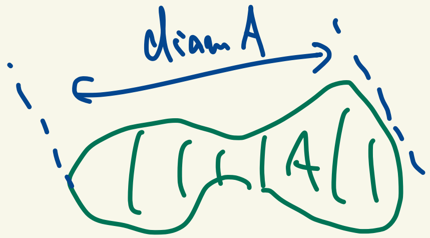
設定 : (Ω, d) : 距離空間

$(\text{ex. } I := [0,1])$

Def 9.5.1 : 各 $A \subset \Omega$ について

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{ d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A \}$$

A の直径



とおく。

Def 9.5.2

Ω 上の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について,

$\delta > 0$ が $\mathcal{U}$ のルベーグ数

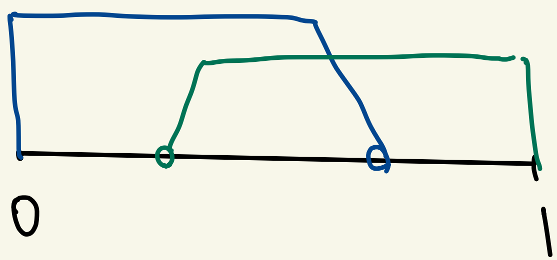
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall A \subset \Omega$ with $\mathrm{diam}(A) \lneq \delta$,

${}^\exists \lambda \in \Lambda$ s.t. $A \subset U_\lambda$

Ex 9.5.3 : $I := [0, 1]$ 上の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ を

$U_1 = [0, \frac{2}{3})$, $U_2 = (\frac{1}{3}, 1]$ とおく.

このとき $\delta > 0$ が $\mathcal{U}$ のルベーグ数 $\Longleftrightarrow$ $\delta \leq \frac{1}{3}$



Thm 9.5.4 : Ω : コンパクトとする.

このとき $\forall \mathcal{U}$: Ω 上の開被覆,

$\mathcal{U}$ のルベーグ数 $\delta > 0$ は存在する.

Proof : 背理法の仮定 $^{\exists}\mathcal{U}$: Ω 上の開被覆 s.t. ルベーグ数が存在しないとする.
$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$

各 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について $A_N \subset \Omega$ を

$\mathrm{diam}(A_N) < \frac{1}{N}$ かつ "$\forall \lambda \in \Lambda$, $A_N \not\subset U_\lambda$" となるものとし,

(T) $a_N \in A_N$ を fix.

$a \in \Omega$ を $\{a_N\}_N$ の収積点とする.

($\because$ コンパクト距離空間は点列コンパクトなので Ω は点列コンパクト)

$\lambda_0 \in \Lambda$ を $a \in U_{\lambda_0}$ なるものとする.

$U(a, r) \subset U_{\lambda_0}$ となる $r > 0$ を fix.

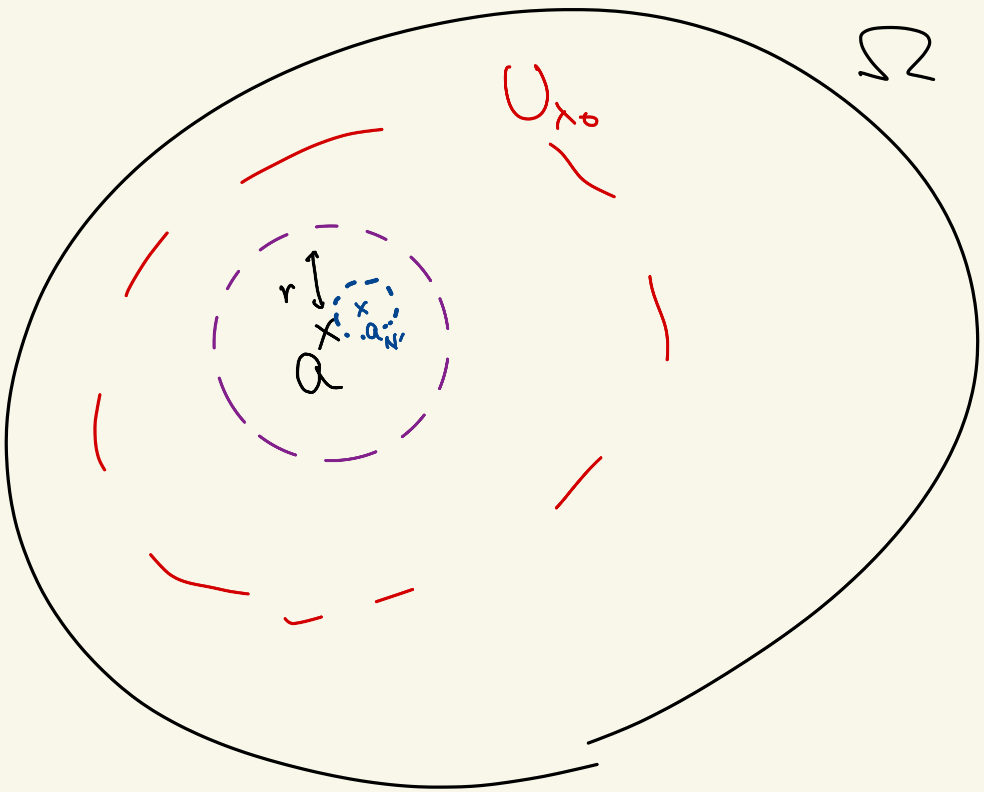
$N_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を $\frac{2}{N_0} < r$ となるものとし,

N' を $N' \geq N_0$ かつ $d(a, a_{N'}) \leq \frac{1}{N_0}$ となるものとする.

このとき $A_{N'} \subset U(a_{N'}, \frac{1}{N'}) \subset U(a, \frac{1}{N_0} + \frac{1}{N'}) \subset U(a, \frac{2}{N_0}) \subset U(a, r) \subset U_{\lambda_0}$

となる. これは # に矛盾

図



後で使う事

<u>Cor 9.5.5</u>: $\mathcal{U}=\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $I := [0, 1]$ の開被覆とする。 コンパクト距離空間

ある $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ について以下が成り立つ

(a) $^\forall l = 1, \cdots, N$, $^\exists \lambda \in \Lambda$ s.t.

$$\left[\frac{l-1}{N}, \frac{l}{N}\right] \subset U_\lambda .$$

後で使う

Cor 9.5.6: $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $I \times I$ の開被覆とする.

このとき ある $N \in \mathbb{Z}_{\geq}$ について次が成り立つ:

(a) $^\forall k, l = 1, \cdots, N,$

$^\exists \lambda \in \Lambda$ s.t. $\left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right] \times \left[\frac{l-1}{N}, \frac{l}{N}\right] \subset U_\lambda$

§9.6: Path lift の構成 (Prop 9.1.4 の証明)

Prop 9.1.4 を示す.

設定: $A^{\neq \emptyset}$: 連結位相空間

記号: $\iota : A \to I \times A$
$\qquad a \mapsto (0, a)$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ I \times A \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dotted, "\tilde{F}"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Lemma 9.6.1: $f \in C(A, \mathbb{R})$

$F \in C(I \times A, S^1)$ s.t. $F \circ \iota = \pi \circ f$ とする.

Assume $\begin{cases} \exists\, 0 := s_0 < s_1 < \cdots < s_{N-1} < s_N := 1 \\ \exists\, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_N \in \{+, -\} \\ \quad \text{s.t. } F([s_{k-1}, s_k] \times A) \subset V_{\varepsilon_k} \end{cases}$

このとき $\exists!\, \tilde{F} \in C(I \times A, \mathbb{R})$ s.t. $\pi \circ \tilde{F} = F$ かつ $f = \tilde{F} \circ \iota$.

Hint: $\hat{F}$ の一意性は Thm 9.3.2 から分かる.

また $\hat{F}$ の存在については以下の帰納的手順で構成して示す.

Step 1 $\hat{F}_1 \in C([s_0, s_1] \times A, \mathbb{R})$ を

$\pi \circ \hat{F}_1 = F|_{[s_0, s_1] \times A}$ かつ $f = \hat{F}_1 \circ \iota$

となるものとする (Prop 9.4.2 より存在する).

Step 2 : $\hat{F}_k \in C([s_{k-1}, s_k] \times A, \mathbb{R})$ が定まっているとき

$(k = 1, \cdots, N-1)$ $f_k \in C(A, \mathbb{R})$ を $f_k(a) := \hat{F}_k(s_k, a)$ $(a \in A)$

により定める.

また $\hat{F}_{k+1} \in C([s_k, s_{k+1}] \times A, \mathbb{R})$ を $\pi \circ \hat{F}_{k+1} = F|_{[s_k, s_{k+1}] \times A}$ かつ $f_k = \hat{F}_{k+1} \circ \iota$

となるものとして定める (Prop 9.4.2 より存在する).

Step3 : $\tilde{F} : I \times A \to \mathbb{R},\ (s, a) \mapsto \tilde{F}_k(s, a)$

$(s \in [s_{k-1}, s_k])$

とおく.

この $\tilde{F}$ が欲しいものであることが確認できる.

Prop 9.1.4 (再掲)

$\forall \gamma \in \mathrm{Loop}(S^1, *)$, $\exists ! \hat{\gamma} \in \mathrm{Path}(\mathbb{R}, 0, \mathbb{Z})$

s.t. $\pi \circ \hat{\gamma} = \gamma$

Proof: $\hat{\gamma}$ の一意性は Thm 9.3.2.

$$\begin{tikzcd} \{*\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ I \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[ur, dashed, "\hat{\gamma}"] & S^1 \end{tikzcd}$$

$\hat{\gamma}$ の構成: $f: \{*\} \to \mathbb{R}$, $\mapsto 0$

$\iota: \{*\} \to I$, $\mapsto 0$ とする.

$U_\pm := \gamma^{-1}(V_\pm)$ とおくと

$\mathcal{U} := \{U_+, U_-\}$ は I の開被覆.

Cor 9.5.5 より Lemma 9.6.1 が適用できて, $\hat{\gamma} \in C(I, \mathbb{R})$ s.t. $\pi \circ \hat{\gamma} = \gamma$ かつ $\hat{\gamma} \circ \iota = f$ を得る.

($I \times \{*\}$ と I を同一視する)

このとき $\hat{\gamma}(0) = 0$ と $\hat{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$ となることは easy ∎

§ 9.7 ホモトピーの lift (Prop 9.2.1 の証明)

Prop 9.2.1 を示す.

記号: $\iota : I \to I \times I,\ t \mapsto (0,t)$ とおく.

設定: $f \in C(I, \mathbb{R})$

$H \in C(I \times I, S^1)$ with $\pi \circ f = H \circ \iota$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ I \times I \arrow[r, "H"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Prop 9.2.1 (再掲): $\exists! \tilde{H} \in C(I \times I, \mathbb{R})$

s.t. $\pi \circ \tilde{H} = H$ かつ $\tilde{H} \circ \iota = f$

Proof : $\widetilde{H}$ の一意性は Thm 9.3.2 から従う.

$\widetilde{H}$ の構成 : $U_\pm := H^{-1}(V_\pm)$ とおく.

$\mathcal{U} := \{U_+, U_-\}$ は $I \times I$ の開被覆となる.

Cor 9.5.6 より $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ を十分大きくとって固定し,

各 $k, l = 1, \cdots, N$ について

$^\exists \varepsilon_{k,l} \in \{+,-\}$ s.t. $\left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right] \times \left[\frac{l-1}{N}, \frac{l}{N}\right] \subset U_\lambda$

であるとする.

$A_k := \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right]$, $\begin{cases} \gamma_k := \gamma|_{A_k} \\ H_k := H|_{I \times A_k} \\ f_k := f|_{A_k} \end{cases}$ とおく.

Lemma 9.6.1 より

$$
\begin{tikzcd}
A_k \arrow[r, "f_k"] \arrow[d, hook, "i_k"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\
I\times A_k \arrow[r, "H_k"'] \arrow[ur, dotted, "\tilde{H}_k"] & S^1
\end{tikzcd}
$$

$\tilde{H}_k \in C(I\times A_k, \mathbb{R})$

s.t. $\pi\circ\tilde{H}_k = H_k$

かつ

$f_k = \tilde{H}_k \circ i_k$

となるものがとれる.

$\hat{H}: I\times I \to \mathbb{R}$, $(s,t)\mapsto \tilde{H}_k(s,t)$ $(t\in A_k)$

とおくと well-defined (Thm 9.3.2 を使って確認する必要あり) で、

条件を満たすことが確認できる. ∎