§10：基本群の与えるホモトピー不変量

基本亜群，基本群からホモトピー不変量(のようなもの)を得る．

"ホモトピー同値なら基本群は同型"

Goal 1：Thm 8.1.6 の証明

Goal 2：$\phi : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$，$z \mapsto z$

ψ ：　〃　　$z \mapsto i$

について

$[\phi] \neq [\psi]$ を示す．

§10.1 : 基本群の与えた基点を保つホモトピー不変量

設定 : X, Y : 位相空間

$a \in X,\ b \in Y$

記号 : $C((X,a),(Y,b)) := \{ \phi \in C(X,Y) \mid \phi(a) = b \}$

$[(X,a),(Y,b)]_b := C((X,a),(Y,b)) / \sim_{h.b.}$

$\phi \sim_{h.b} \psi$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^\exists H$: ホモトピー from ϕ to ψ

with 境界条件 " $H(a,t) = b$ " $(\forall t \in I)$

"基点を保つ"ともいう

$\mathrm{Hom}(\pi_1(X,a), \pi_1(Y,b)) := \{ \pi_1(X,a)$ から $\pi_1(Y,b)$ への群準同型 $\}$

Prop 10.1.1 : 各 $\alpha \in [(X,a),(Y,b)]_b$ について

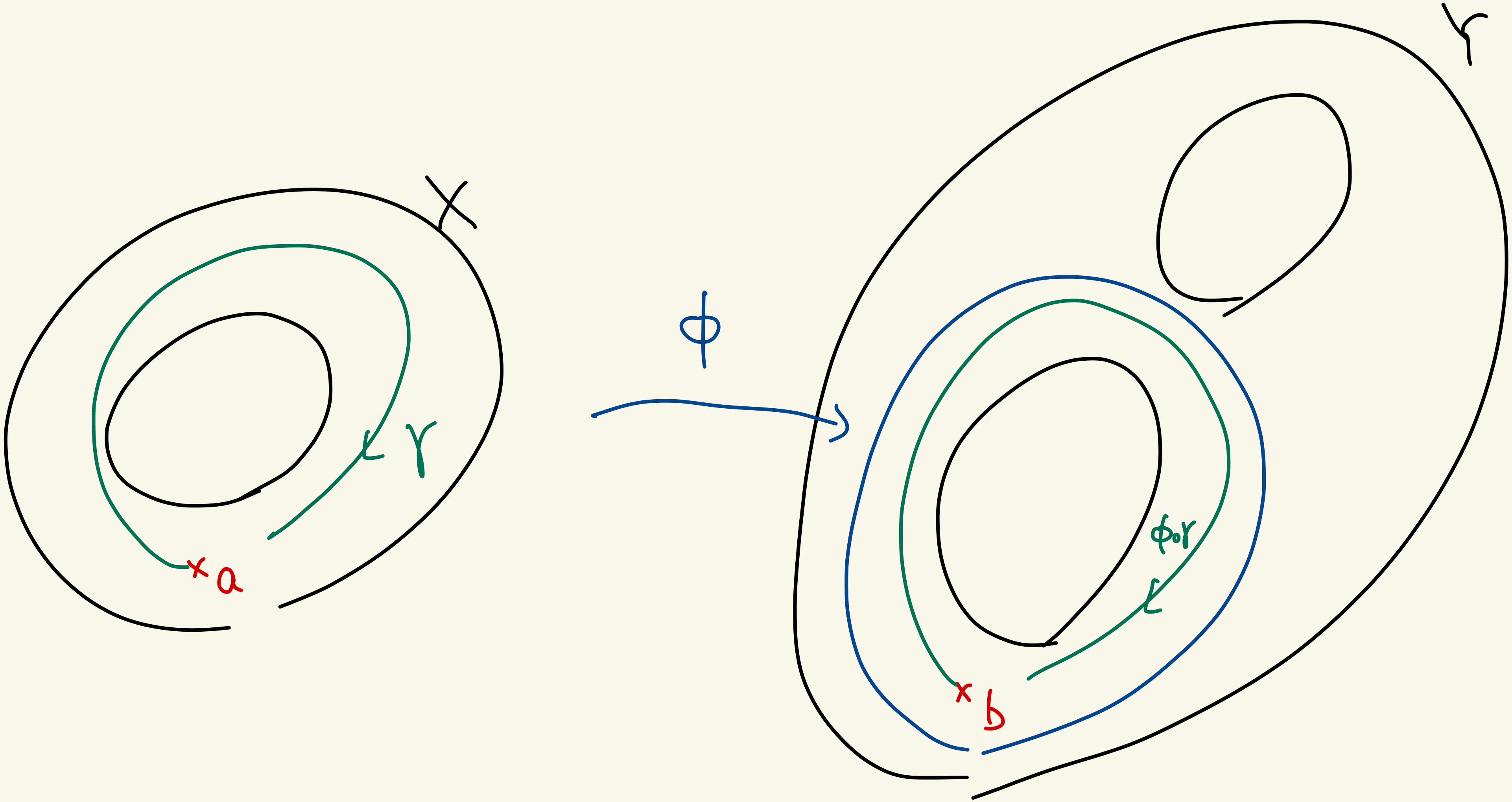
$$\alpha_* : \pi_1(X,a) \to \pi_1(Y,b)$$
$$[\gamma]_b \mapsto \alpha \circ [\gamma]_b \quad \left(:= [\phi\circ\gamma]_b \text{ for } \phi\in\alpha \right)$$

Thm 7.2.4

は群準同型

Hint : **Lem 10.1.2** $\forall \gamma_1,\gamma_2 \in \mathrm{Loop}(X,a)$, $\forall \phi \in C((X,a),(Y,b))$,

$$\phi\circ(\gamma_1 * \gamma_2) = (\phi\circ\gamma_1) * (\phi\circ\gamma_2)$$


X
γ
a
ϕ
Y
ϕ∘γ
b

Cor 10.1.3

$$[(X,a),(Y,b)]_b \to \mathrm{Hom}(\pi_1(X,a),\pi_1(Y,b))$$

$$\alpha \mapsto \alpha_*$$

は well-defined.

"基点を保つホモトピー"不変量が得られた!

⟿ 本当は"普通のホモトピー"不変量が欲しい

§ 10.2 基本群の関手性

設定：X, Y, Z：位相空間

Def 10.2.1：各 $\phi \in C(X, Y)$, $a_0, a_1 \in X$ について

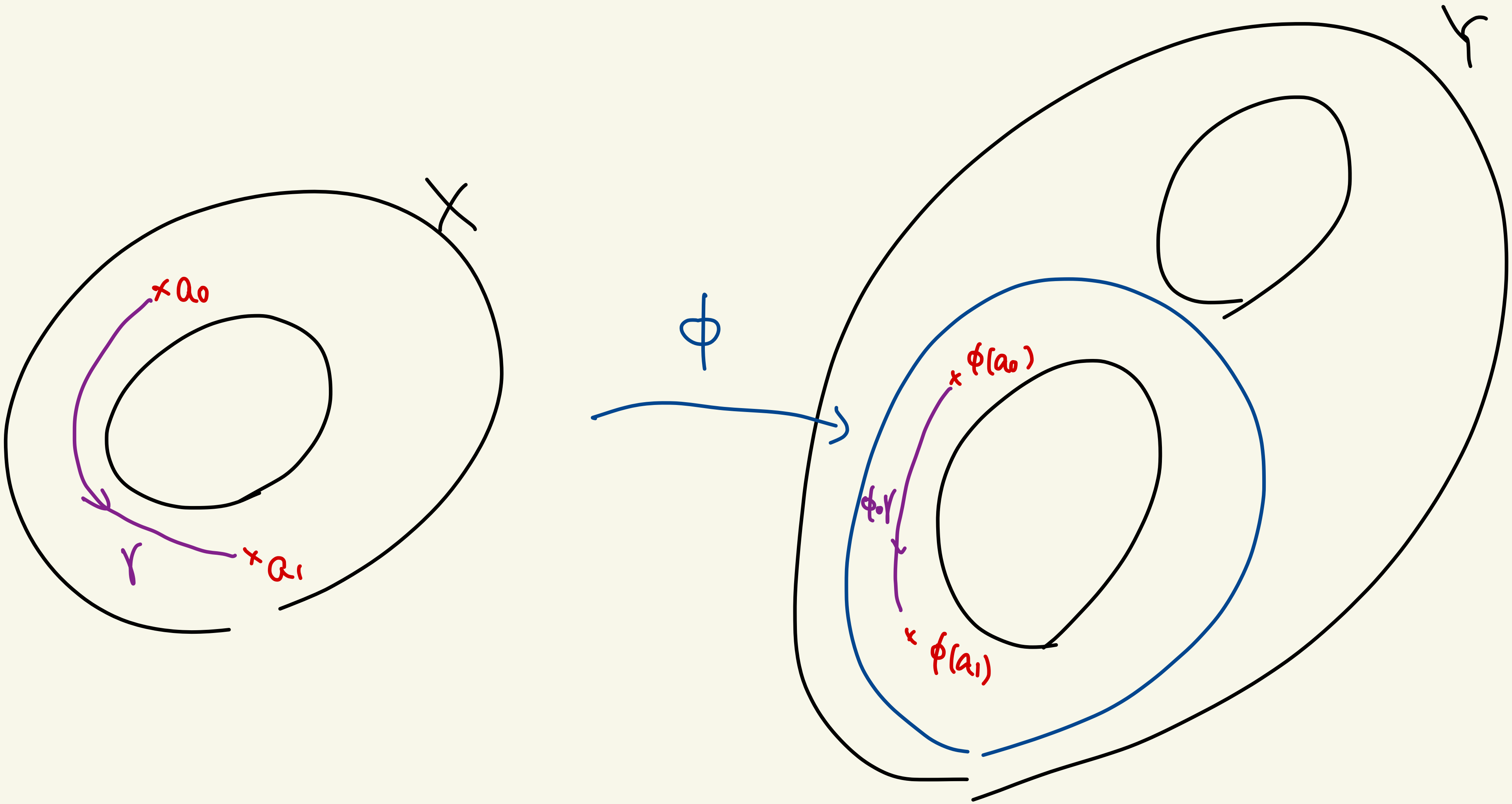
$$\phi_* : \Pi(X, a_0, a_1) \to \Pi(Y, \phi(a_0), \phi(a_1)),\ [\gamma]_b \mapsto [\phi]_b \circ [\gamma]_b = [\phi \circ \gamma]_b$$

とおく.

また同じ "ϕ_*" の記号を

$$\phi_* : \Pi(X) \to \Pi(Y),\ [\gamma]_b \mapsto [\phi]_b \circ [\gamma]_b$$

の意味でも使う.


X
a_0
a_1
γ
ϕ
Y
$\phi(a_0)$
$\phi(a_1)$
$\phi \circ \gamma$

Thm 10.2.2 : 各 $\phi \in C(X,Y)$ について

$\phi_* : \pi(X) \to \pi(Y)$ は 演算"$*$"を保つ

また $\phi_*([\gamma^a_{id}]_b) = [\gamma^{\phi(a)}_{id}]_b \quad (\forall a \in X)$.

Hint :

Lem 10.2.3 : $^\forall \gamma_1, \gamma_2 \in C(I, X),\ ^\forall \phi \in C(X,Y)$

$$\phi \circ (\gamma_1 * \gamma_2) = (\phi \circ \gamma_1) * (\phi \circ \gamma_2)$$

Lem 10.1.2 の一般化

Thm 10.2.4 : $\phi_1 \in C(X,Y)$, $\phi_2 \in C(Y,Z)$ について

$$(\phi_2)_* \circ (\phi_1)_* = (\phi_2 \circ \phi_1)_* \text{ as } \Pi(X) \to \Pi(Z).$$

easy

$\underline{\underline{Q}}$: $\phi, \psi \in C(X, Y)$ が $\phi \sim_h \psi$ とする.

このとき $\phi_* = \psi_*$ as $\Pi(X) \to \Pi(Y)$?

($\rightsquigarrow$ Yes なら "ホモトピー不変量"!)

$\underline{\underline{A}}$: 一般には No.

$\because$ $a \in X$ について $\phi(a) \neq \psi(a)$ となることがある.

このとき $\phi_*(\pi_1(X, a)) \subset \pi_1(Y, \phi(a))$

$\psi_*(\pi_1(X, a)) \subset \pi_1(Y, \psi(a))$ 非交

より $\phi_* \neq \psi_*$

Remark : "ϕ_* : $\pi(X) \to \pi(Y)$" を "自然同型" で割れば

ホモトピー不変量が手に入る.

この講義で自然同型を定義するには時間がかかりすぎるので、

本質的な部分 (Thm 10.2.5) のみ紹介する.

設定： X, Y ：位相空間

$\phi, \psi \in C(X, Y)$ with $\phi \sim_h \psi$.

$H \in C(X \times I, Y)$ ： ϕ から ψ へのホモトピー

$a_0, a_1 \in X$

記号 各 $i = 0, 1$ について，

$l_i^H \in \mathrm{Path}(Y, \phi(a_i), \psi(a_i))$ を $l_i^H(t) = H(a_i, t) \ (t \in I)$ として定める．

また $\theta_i := [l_i^H]_b \in \Pi(Y, \phi(a_i), \psi(a_i))$ とおく．

Thm 10.2.5 : $\forall \alpha \in \Pi(X, a_0, a_1)$,

$$\theta_1 * (\phi_*(\alpha)) = (\psi_*(\alpha)) * \theta_0$$

Hint : $\gamma \in Path(X, a_0, a_1)$ を fix

以下を示せばよい

示 $l_1^H * (\phi\circ\gamma) \sim_{h.b.} (\phi\circ\psi) * l_2^H$

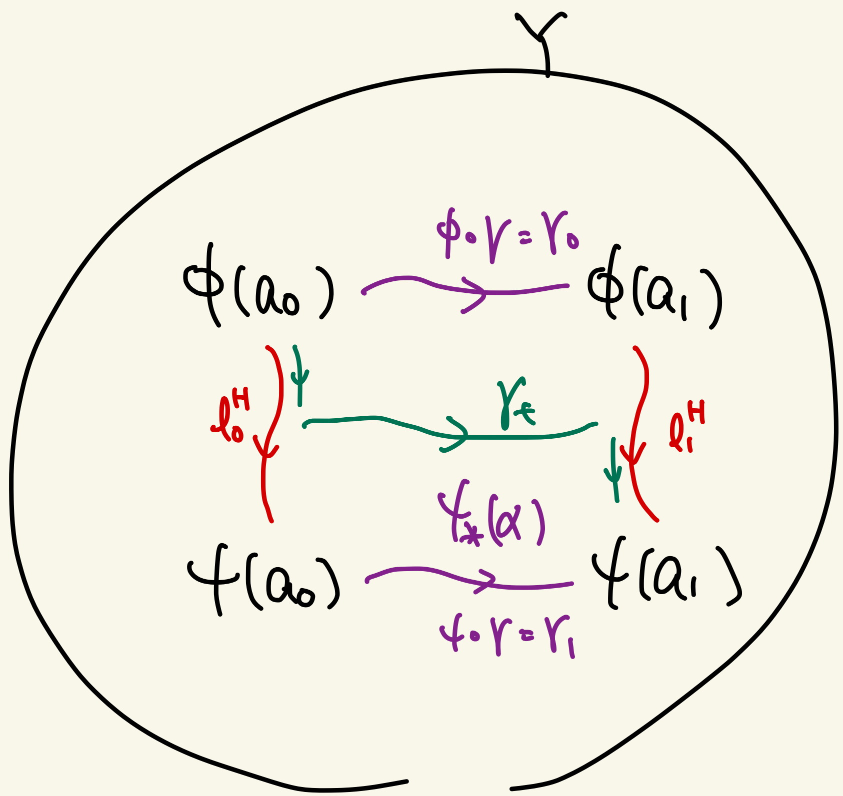
各 $t \in I$ について $\gamma_t := H_t \circ \gamma : I \to Y$ とおく.

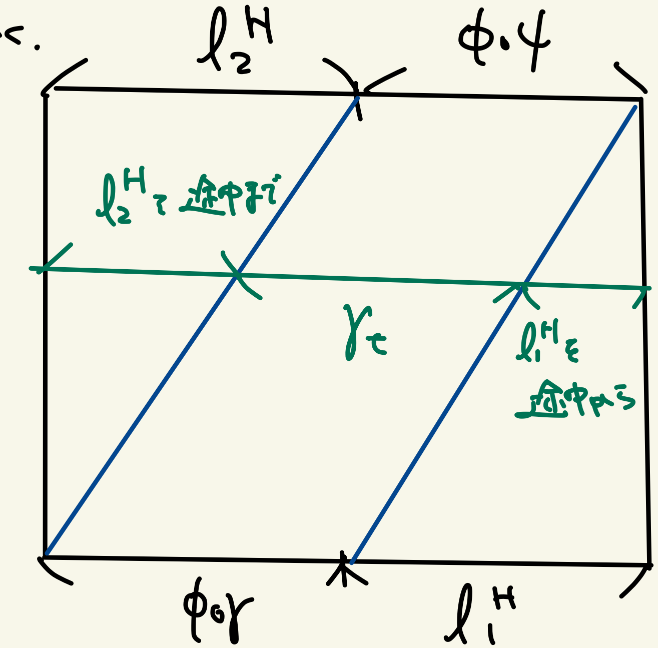
（ただし $H_t : X \to Y,\ x \mapsto H(x,t)$）

右の図を参考に

$l_1^H * (\phi\circ\gamma)$ から $(\phi\circ\psi) * l_2^H$ への

ホモトピーを構成すればよい.





$$\textcircled{H}_{\theta_0,\theta_1} : \pi(Y, \phi(a_0), \phi(a_1)) \to \pi(Y, \psi(a_0), \psi(a_1))$$

$$\alpha \mapsto \theta_1 * \alpha * \overline{\theta_0}$$

（ただし $\overline{\theta_0} = [\overline{l_0^H}]$ ）

とおく（これは全単射）.

Cor 10.2.6 :

$$\textcircled{H}_{\theta_0,\theta_1} \circ \phi_* = \psi_* \text{ as } \pi(X, a_0, a_1) \to \pi(Y, \psi(a_0), \psi(a_1)).$$

特に $\phi_* : \pi(X, a_0, a_1) \to \pi(Y, \phi(a_0), \phi(a_1))$ が単射 [resp. 全射]

$\Leftrightarrow$ $\psi_* : \pi(X, a_0, a_1) \to \pi(Y, \psi(a_0), \psi(a_1))$ が単射 [resp. 全射].

後で使う

Cor 10.2.7　$a_0 = a_1$ $(=: a)$, $\phi(a) = \psi(a)$ $(=: b)$ とする.

このとき $\exists \theta \in \pi_1(Y, b)$ s.t.

$$\theta * \phi_*([\gamma]_b) * \underset{\theta の逆元}{\bar{\theta}} = \psi_*([\gamma]_b) \quad (\forall [\gamma]_b \in \pi_1(X, a))$$

§10.3：ホモトピーと基本群

まず Thm 10.2.1 の応用として Thm 8.1.6 を示す.
(Cor 10.2.6)

Thm 10.3.1 (Thm 8.1.6 の詳細版)
$$\left(\begin{array}{l} X, Y：位相空間, \\ \phi : X \to Y：ホモトピー同値 \\ a \in X \end{array} \right.$$ とする.

このとき $\phi_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, \phi(a))$ は群同型.
$$[\gamma]_b \mapsto [\phi \circ \gamma]_b$$

Proof of Thm 10.3.1: ϕ_* が群準同型であることは Thm 10.2.2 (or Prop 10.1.1) から従う.

示) $\phi_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, \phi(a))$ は全単射

$\psi \in C(Y, X)$ を $[\psi] \circ [\phi] = [id_X]$ かつ $[\phi] \circ [\psi] = [id_Y]$ を満たすものとする.

(Recall : $\phi : X \to Y$ はホモトピー同値)

$(id_X)_* = id_{\pi_1(X,a)} : \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, a)$ は全単射なので,

Cor 10.2.6 より $\psi \circ \phi$ ($\sim_h id_X$) について

$(\psi \circ \phi)_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, (\psi \circ \phi)(a))$ も全単射.

$\parallel$

$\psi_* \circ \phi_*$

特に ϕ_* は単射.

同様に $(\phi\circ\psi)_* : \pi_1(Y, \phi(a)) \to \pi_1(Y, (\phi\circ\psi)(\phi(a)))$ も全単射

$$\phi_* \circ \psi_*$$

よって ϕ_* は全射. ∎

Ex 10.3.2 :

$\phi : S^1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z \mapsto z$ はホモトピー同値

(cf. Ex 5.1.6)

特に Thm 10.3.1 より

$* := 1 \in S^1$

$$\underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cong}{\phi_* : \pi_1(S^1, *)}} \to \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, *)$$ は群同型.

当面の目標だったこ

⇒

Ex 10.3.3: $\phi : S^1 \to \mathbb{C}\setminus\{0\},\ z \mapsto z$, $\psi : S^1 \to \mathbb{C}\setminus\{0\},\ z \mapsto i$ とする。

$[\phi] \neq [\psi]$ を示そう。

まず Ex 10.3.2 より

$\phi_* : \pi_1(S^1, *) \to \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, *)$ は全単射。

また

$\psi_* : \pi_1(S^1, *) \to \pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}, i)$ は $\psi_*([l]_b) = [\gamma^i_{id}]_b$ $(\forall l \in Loop(S^1, *))$

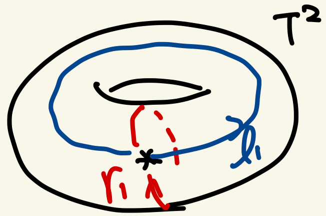
より全射でない。

従って Cor 10.2.6 より $[\phi] \neq [\psi]$.

Ex 10.3.4 :

$T^2 := S^1 \times S^1$, $* := (1,1) \in T^2$ とおく.

また $\gamma_k, l_k \in \mathrm{Loop}(T^2, *)$ を



$\gamma_k(s) := (\exp(2\pi i k s), 1)$, $l_k(s) := (1, \exp(2\pi i k s))$

$(s \in I)$

として定める.

次の Thm をとりあえず認める(次回示す: Ex 11.1.2)

Thm 10.3.5 : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \pi_1(T^2, *)$ は群同型

$(k_1, k_2) \mapsto [\gamma_{k_1}]_b * [l_{k_2}]_b$

$\phi, \psi \in C(T^2, T^2)$ をそれぞれ

$\phi = \mathrm{id}_{T^2}$, $\psi : T^2 \to T^2$, $(z_1, z_2) \mapsto (z_1^2, z_2^2)$

と定める.

このとき $[\phi] \neq [\psi]$ となることを示そう.

∵ $\phi(*) = \psi(*) = * \in T^2$ に注意.

$\phi_* : \pi_1(T^2, *) \to \pi_1(T^2, *)$ は恒等写像であり,

$\psi_* : \pi_1(T^2, *) \to \pi_1(T^2, *)$, $[\gamma_{k_1}]_b * [l_{k_2}]_b \mapsto [\gamma_{2k_1}]_b * [l_{2k_2}]_b$ となる

特に $\phi_* \neq \psi_*$ (★) 要確認

背理法の仮定：$[\phi] = [\psi]$

Cor 10.2.7 より $\theta \in \pi_1(T^2, *)$ であって

$$\theta * \phi_*([\gamma]_b) * \bar{\theta} = \psi_*([\gamma]_b) \quad (\forall [\gamma]_b \in \pi_1(T^2, *))$$

Thm 10.3.5 より $\pi_1(T^2, *)$ は可換なので $\phi_* = \psi_*$.

これは ☆ に反する.

□