当面の目標：基本群の計算テクニックを学ぶ

① 直積空間の基本群

② Van Kampen の定理

Section 11 : 直積空間の基本群.

設定 : (X, x_0), (Y, y_0) ; 基点付き空間

(位相空間とその上の点のペア)

Goal : $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$

空間の直積

群の直積

Section 11.1 : 証明の方針

記号 : $p_X : X \times Y \to X, \quad (x, y) \mapsto x$

$p_Y : X \times Y \to Y, \quad (x, y) \mapsto y$

$(p_X)_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0), \quad [\gamma]_b \mapsto [p_X \circ \gamma]_b$

$(p_Y)_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(Y, y_0), \quad [\gamma]_b \mapsto [p_Y \circ \gamma]_b$

群準同型

各 $\gamma \in \mathrm{Loop}(X, x_0)$, $\ell \in \mathrm{Loop}(Y, y_0)$ について

$\gamma_{y_0}, \ell_{x_0} \in \mathrm{Loop}(X \times Y, (x_0, y_0))$ を

$\gamma_{y_0} : I \to X \times Y, \quad s \mapsto (\gamma(s), y_0)$

$\ell_{x_0} : I \to X \times Y, \quad s \mapsto (x_0, \ell(s))$ と定める.

Thm 11.1.1 :

$$((p_X)_*, (p_Y)_*) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

$$\alpha \mapsto ((p_X)_*(\alpha), (p_Y)_*(\alpha))$$

は群同型.

また $\xi : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$

$$([\gamma]_b, [\ell]_b) \mapsto [\gamma_{y_0}] * [\ell_{x_0}]_b \ (= [\gamma_{y_0} * \ell_{x_0}]_b)$$

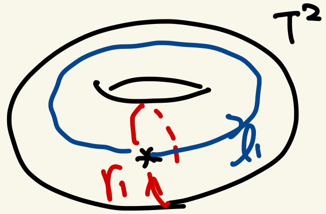
は well-defined で $((p_X)_*, (p_Y)_*)$ の逆写像.

Ex 11.1.2: Ex 10.3.4 の設定を考える.

$S^1 := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$, $* \in S^1$ ← 記号の乱用

$T^2 := S^1 \times S^1$, $* = (1,1) \in T^2$ とおく.

また: $\gamma_k, l_k \in \mathrm{Loop}(T^2, *)$ を



$\gamma_k(s) := (\exp(2\pi i k s), 1)$, $l_k(s) := (1, \exp(2\pi i k s))$
$(s \in I)$ として定める.

このとき

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\tau \times \tau"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \pi_1(T^2, *) \\
\pi_1(S^1, *) \times \pi_1(S^1, *) \arrow[ur, "\wr"'] &
\end{tikzcd}, \quad (k_1, k_2) \mapsto [\gamma_{k_1}]_b * [l_{k_2}]_b$$

は群同型

Section 9

Thm 11.1.1 の証明について:

注 $((p_X)_*, (p_Y)_*)$ は群準同型

① f の well-defined 性を示す

② f が $((p_X)_*, (p_Y)_*)$ の逆写像であることを示す

詳しくは次の Section へ

(講義ではたぶんとばす)

§ 11.2 : Prop 11.1.3 の証明

$\mathcal{G} := ((p_X)_*, (p_Y)_*)$ とおく.

以下をそれぞれ示す.

示1 : $\mathcal{J}$ の well-defined 性 ← easy

示2 : $\mathcal{G} \circ \mathcal{J} = id_{\pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0)}$ ← easy

示3 : $\mathcal{J} \circ \mathcal{G} = id_{\pi_1(X \times Y, (x_0,y_0))}$ ← やや面倒

示1 : ξ の well-defined 性

$\gamma, \gamma' \in \mathrm{Loop}(X, x_0)$ with $[\gamma]_b = [\gamma']_b$

$l, l' \in \mathrm{Loop}(Y, y_0)$ with $[l]_b = [l']_b$ とする.

示) $[\gamma_{y_0}]_b * [l_{x_0}]_b = [\gamma'_{y_0}]_b * [l'_{x_0}]_b$ in $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$.

$[\gamma_{y_0}]_b = [\gamma'_{y_0}]_b$ かつ $[l_{x_0}]_b = [l'_{x_0}]_b$ in $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$

が成り立つことが簡単に分かるので,

$$[\gamma_{y_0}]_b * [l_{x_0}]_b = [\gamma'_{y_0}]_b * [l'_{x_0}]_b$$

要確認

∎

示2 : $\eta \circ \xi = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0)}$

$\forall \gamma \in \mathrm{Loop}(X, x_0)$, $\forall l \in \mathrm{Loop}(Y, y_0)$ を fix

示 $(\eta \circ \xi)([\gamma]_b, [l]_b) = ([\gamma]_b, [l]_b)$

単位元

$(p_X)_*([l_{x_0}]_b) = [\gamma^{x_0}_{\mathrm{id}}]_b$, $(p_X)_*([\gamma_{y_0}]_b) = [\gamma]_b$

$(p_Y)_*([\gamma_{y_0}]_b) = [\gamma^{y_0}_{\mathrm{id}}]_b$, $(p_Y)_*([l_{x_0}]_b) = [l]_b$ に注意（要確認）すると,

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \eta([\gamma_{y_0}]_b * [l_{x_0}]_b) \\
&= ((p_X)_*([\gamma_{y_0}] * [l_{x_0}]_b), (p_Y)_*([\gamma_{y_0}]_b * [l_{x_0}]_b)) \\
&= ((p_X)_*([\gamma_{y_0}]_b) * (p_X)_*([l_{x_0}]_b), (p_Y)_*([\gamma_{y_0}]_b) * (p_Y)_*([l_{x_0}]_b)) \\
&= ([\gamma]_b, [l]_b) = \text{右辺}
\end{aligned}
$$

∎

示す: $\xi \circ \eta = \mathrm{id}_{\pi_1(X\times Y,\ (x_0, y_0))}$

$\forall \delta \in \mathrm{Loop}(X\times Y, (x_0, y_0))$ を fix.

$\gamma := p_X \circ \delta \in \mathrm{Loop}(X, x_0)$

$\ell := p_Y \circ \delta \in \mathrm{Loop}(Y, y_0)$ とおく.

以下を示せばよい:

示 $\delta \sim_{h.b.} \gamma_{y_0} * \ell_{x_0}$

まず $(\gamma_{y_0} * \ell_{x_0})(s) = ((\gamma * \gamma^{x_0}_{id})(s), (\gamma^{y_0}_{id} * \ell)(s))$ $(s \in I)$

に注意.

$\gamma \sim_{h.b} \gamma * \gamma_{id}^{x_0}$

$\ell \sim_{h.b} \gamma_{id}^{y_0} * \ell$ (Prop 8.1.2 (2) より)

境界条件付きホモトピー

$H : I \times I \to X$ from γ to $\gamma * \gamma_{id}^{x_0}$

$G : I \times I \to Y$ from ℓ to $\gamma_{id}^{y_0} * \ell$

をとれる.

$K : I \times I \to X \times Y$ とおくと,

$(s, t) \mapsto (H(s,t), G(s,t))$

これは δ から $\gamma_{y_0} * \ell_{x_0}$ への境界条件つきホモトピーとなる $\blacksquare$

要確認