これから

① 群の表示

② 群の自由積，融合積

↓

ゴール：Van Kampen の定理

§12：自由群，群の表示

ゴール：群を"生成系"+"関係式"として理解する方法を学ぶ．

§12.1 : 自由モノイド

設定 : S : 集合

Def 12.1.1 : (Z, ι) : S の生成する自由モノイド

$\Longleftrightarrow$

- Z : モノイド
- $\iota : S \to Z$: 写像
- $\forall (M, f : S \to M)$, $\exists ! \tilde{f} : Z \to M$: モノイド hom s.t. $\tilde{f} \circ \iota = f$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] & M \\ S \arrow[u, "\iota"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

M : モノイド　f : 写像

積と単位元を保つ

Thm 12.1.2: Sの生成する自由モノイドは存在する.

準備: Prop 12.1.3: $FM(S) := \coprod_{n=0}^{\infty} S^n$ とおく.

ただし $\varepsilon := (\ ) \in S^0$ とおく. ($S^0 = \{\varepsilon\}$ となる)

空っぽ

積を

$$FM(S) \times FM(S) \to FM(S)$$

$$(\underset{S^n}{\underset{\cap}{w}}, \underset{S^m}{\underset{\cap}{w'}}) \longmapsto w \cdot w' := (w_1, \cdots, w_n, w'_1, \cdots, w'_m)$$

と定める.

このとき $(FM(S), \cdot)$ は

$\varepsilon = (\ )$ を単位元とするモノイドとなる.

Thm 12.1.4 :

$\iota : S \to FM(S),\ x \mapsto (x) \in S^1$ とおく.

$(FM(S), \iota)$ は S の生成する自由モノイド

Proof : M : モノイド, $f : S \to M$: 写像 とする.

示 $\exists!\ \tilde{f} : FM(S) \to M$: モノイド hom s.t. $\hat{f} \circ \iota = f$

$\tilde{f}$ の構成 : $\hat{f} : FM(S) \to M,$
$w = (w_1, \cdots, w_n) \mapsto \iota(w_1) \cdot \iota(w_2) \cdots \iota(w_n)$ とおけば OK

要確認

一意性 : $\hat{f}_1, \hat{f}_2$ が条件を満たすとする.

示 $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

$\hat{f}_1, \hat{f}_2$ はモノイド hom なので $\hat{f}_1(\varepsilon) = \tilde{f}_2(\varepsilon) = M$ の単位元.

$\forall w = (w_1, \cdots, w_n) = \iota(w_1) \cdots \iota(w_n) \in FM(S)\ (n \geq 1)$ について

$\hat{f}_1(w) = \tilde{f}_1(\iota(w_1)) \cdots \tilde{f}_1(\iota(w_n)) = f(w_1) \cdots f(w_n)$

同様に $\tilde{f}_2(w) = f(w_1) \cdots f(w_n)$

図

Thm 12.1.5 : S の生成する自由モノイドは
同型を除いて一意.

$(Z, \eta), (Z', \eta')$: S の生成する自由モノイドとする.

このとき $\exists! \tilde{\eta} : Z \to Z'$: モノイド同型
s.t. $\tilde{\eta}' \circ \eta = \eta'$

Hint :

Lemma 12.1.6 : $\Phi : Z \to Z$: モノイド hom s.t. $\Phi \circ \eta = \eta$
とする.

このとき $\Phi = \mathrm{id}_Z$

§12.2：自由群

設定：S：集合

Def 12.2.1：(Z, y)：S の生成する自由群

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

- Z：群
- $y : S \to Z$：写像
- $\forall (\underset{\text{群}}{G}, \underset{\text{写像}}{f} : S \to G)$, $\exists ! \hat{f} : Z \to G$：群 hom s.t. $\hat{f} \circ y = f$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, dashed, "\exists ! \hat{f}"] & G \\ S \arrow[u, "y"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

Thm 12.2.2：Sの生成する自由群は存在する．
また同型を除いて一意．

一意性：Thm 12.1.5と同様

構成：準備：

記号 $\overline{S} := \{ \overline{x} \mid x \in S \}$
ただの記号（形式的逆元）

$(\widetilde{FG}(S) := FM(S \sqcup \overline{S}), 1)$：
$S \sqcup \overline{S}$の生成する自由モノイド
(Thm 12.1.4)

Def 12.2.3 : • $\widetilde{FG}(S)$ 上の二項関係 $\succ$ を以下で定める

$$w \succ w' \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}\alpha, \beta \in \widetilde{FG}(S),\ {}^{\exists}x \in S \text{ s.t.}$$

$$\begin{cases} w = \alpha \cdot \iota(x) \cdot \iota(\bar{x}) \cdot \beta & (w = (\alpha_1 \cdots \alpha_n, x, \bar{x}, \beta_1 \cdots \beta_m)) \\ w' = \alpha \cdot \beta & (w' = (\alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_m)) \end{cases}$$

• また "$\succ$" の生成する $\widetilde{FG}(S)$ 上の同値関係 (cf. 演習問題) を "$\sim$" とする.

• $FG(S) := \widetilde{FG}(S)/\sim$ とおく.

各 $w=(w_1, \cdots, w_n) \in \widetilde{FG}(S)$ について、その同値類を

$$[w] = [w_1 \cdots w_n]$$ と表す　(記号の乱用)

また ε の同値類も ε と表す

"( )" 空っぽ

Ex 12.2.4 : $S = \{a, b\}$ $(a \neq b)$ のとき.

$S \sqcup \bar{S} = \{a, b, \bar{a}, \bar{b}\}$ に注意.

$FG(S)$

$\rotatebox{90}{$\in$}$

- $[\bar{a}\,a\,b\,a\,\bar{b}\,b\,\bar{a}\,\bar{a}] = [b\,a\,\bar{a}\,\bar{a}] = [b\,\bar{a}]$

$\uparrow$

$(\bar{a}, a, b, a, \bar{b}, b, \bar{a}, \bar{a}) \in \widetilde{FG}(S)$ の同値類

- $[\bar{a}\,b\,\bar{b}\,a] = [\bar{a}\,a] = \varepsilon$

Thm 12.2.5

(1) $\cdot : FG(S) \times FG(S) \to FG(S)$ は写像として well-defined で

$$([w], [w']) \mapsto [w \cdot w']$$

$FG(S)$ に ε を単位元とする群構造を定める.

(2) $j : S \to FG(S)$, $x \mapsto [x]$ とおくと,

$(FG(S), j)$ は S の生成する自由群

(演習問題)

Ex 12.2.6 $S = \{a\}$ の場合

$S \sqcup \bar{S} = \{a, \bar{a}\}$ に注意

$$a^n := [\underbrace{a \cdots a}_{n}]$$

$a^0 := \varepsilon$ とおく.

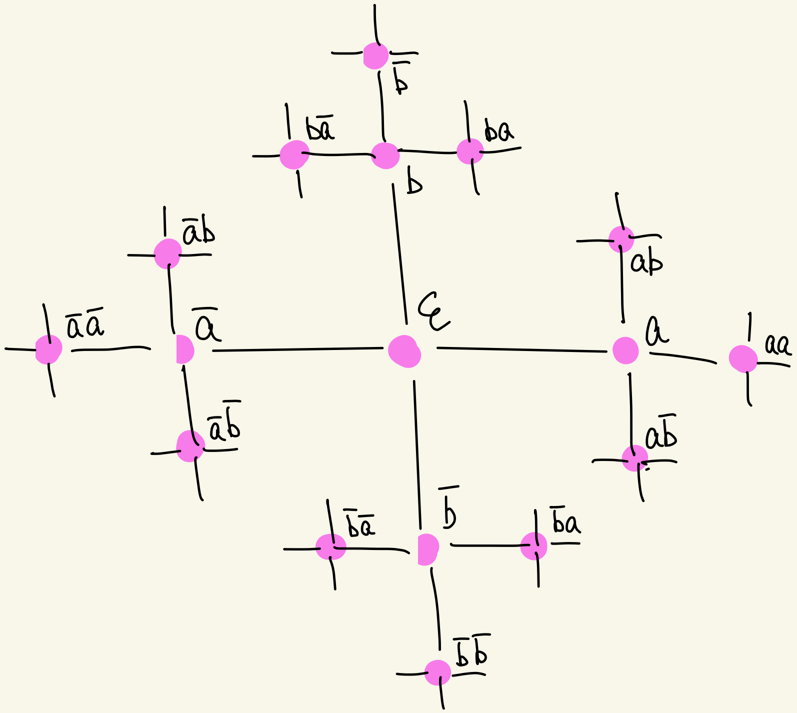
$$a^{-n} := [\underbrace{\bar{a} \cdots \bar{a}}_{n}] \quad (n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$$

このとき $FG(\{a\}) = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$

as groups

Ex 12.2.7 :

$S = \{a, b\}$ $(a \neq b)$ のとき



$FG(\{a, b\})$ は非可換無限群

$FG(\{a, b\})$ を可視化したもの

（ケーリーグラフ）

§12.3：群の表示

設定：S：集合

$R \subset FG(S)$：部分集合

記号：$\hat{R}_{FG(S)} = \hat{R} :=$ R の正規閉包 in $FG(S)$

Def 12.3.1：$\langle S \mid R \rangle := FG(S)/\hat{R}$

S で生成され，R を関係式とする群

$R = \emptyset$ のときは $\langle S \rangle := \langle S \mid \emptyset \rangle$ と書く．

Ex 12.3.2: $S = \{a\}$, $R = \{a^n = \underbrace{[a \cdots a]}_{n \times}\}$ $(n \in \mathbb{Z})$

$$\rightsquigarrow FG(S) = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

$$\hat{R} = \{a^{nk} \mid k \in \mathbb{Z}\} \cong n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$$

$$\langle S \mid R \rangle = FG(S)/\hat{R} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Ex 12.3.3: $S = \{a, b\}$ $(a \neq b)$, $R = \{[ab\bar{a}\bar{b}]\}$

カッコを省略する

$$\langle S \mid R \rangle = \langle a, b \mid ab\bar{a}\bar{b} \rangle$$

これを単位元としてみる

特に $ab\bar{a}\bar{b} = \varepsilon$

$\rightsquigarrow ab = ba$

$$= \{ a^{k_1} b^{k_2} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \}$$

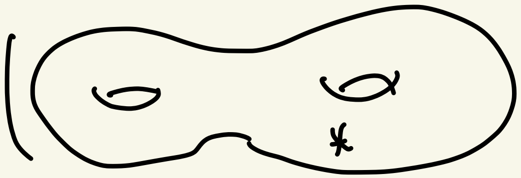
$$\cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Ex 12.3.4:

$S = \{a, b, a', b'\}$

$R = \{a b \bar{a} \bar{b} a' b' \bar{a}' \bar{b}'\}$

後で示す

$\pi_1($  $) \cong \langle S \mid R \rangle$

Thm 12.3.5: G : 群 とする. $\pi : FG(S) \to \langle S \mid R \rangle$ を商写像とする.

$$\mathrm{Map}_R(S, G) := \{ f : S \to G : 写像 \mid R \subset \mathrm{Ker}\,\hat{f} \}$$

$$\left(\begin{tikzcd} FG(S) \arrow[r, "\hat{f}"] & G \\ S \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \right)$$

$$\mathrm{Hom}(\langle S \mid R \rangle, G) := \{ h : \langle S \mid R \rangle \to G \mid 群\ \mathrm{hom} \}$$

とおく.

このとき $\mathrm{Hom}(\langle S \mid R \rangle, G) \to \mathrm{Map}_R(S, G)$ は全単射

$$h \mapsto h \circ \pi \circ j$$

(easy)

設定：G：群

　$S \subset G$：生成系（包含写像を $\iota_G : S \hookrightarrow G$ とおく）

記号：$\tilde{\iota}_G : FG(S) \to G$：群 hom s.t. $\tilde{\iota}_G \circ \iota = \iota_G$

　全射（$S \subset G$：生成系）

設定：$R \subset \operatorname{Ker} \tilde{\iota}_G$：部分集合 s.t. $\hat{R} = \operatorname{Ker} \tilde{\iota}_G$

　Rの正規閉包 in $FG(S)$

群Gの"表示"

Thm 12.3.5：$G \cong \langle S \mid R \rangle$

準同型定理から従う

メモ：任意の群は表示をもつ $\left(\begin{array}{l} S = G \\ R = \operatorname{Ker} \Phi \end{array} \right)$

表示は一意でない

Thm 12.3.6: H: 群

$$\mathrm{Hom}(G, H) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{ f \in \mathrm{Hom}(FG(S), H) \mid R \subset \mathrm{Ker} f \}$$

$$h \longmapsto h \circ \hat{\iota}_G$$

(Thm 12.3.5 から従う)