① 群の表示 ← いまここ

② 群の自由積, 融合積

↓

ゴール: Van Kampen の定理

§13.1 : 群の自由積

設定 : G_1, G_2 : 群

Def 13.1.1 : (Z, j_1, j_2) が G_1, G_2 の自由積

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Z : 群, $j_k : G_k \to Z$: 群 hom $(k=1,2)$

かつ

$\forall (Z', j'_1, j'_2)$, $\exists! \, \Phi : Z \to Z'$: 群 hom s.t. $\Phi \circ j_k = j'_k \; (k=1,2)$

Z' : 群, $j'_k : G_k \to Z'$ 群 hom

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, hook, "j_1"] \arrow[dr, hook, "j_1'"'] & Z \arrow[d, dashed, "\exists!\,\Phi"'] & G_2 \arrow[l, hook', "j_2"'] \arrow[dl, hook', "j_2'"] \\
& Z' &
\end{tikzcd}$$

Thm 13.1.2 : G_1, G_2 : 群の族，
自由積は存在する．
また同型を除いて一意．

Hint :
一意性 : Thm 12.1.5 と同じアイデア
構成 : 各 $k=1,2$ について $G_k = \langle S_k \mid R_k \rangle$ と表示しておく．
$(S_k \subset G,\ R_k \subset FG(S_k))$

また $FG(S_k)$ を $FG(S_1 \sqcup S_2)$ の部分群とみなす．
(演習問題参照)

特に R_k を $FG(S_1 \sqcup S_2)$ の部分集合とみなす．

$$G_1 * G_2 := \langle S_1 \sqcup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle \quad \left(:= FG(S_1 \sqcup S_2) \big/ (R_1 \cup R_2 \text{ の正規閉包 in } FG(S_1 \sqcup S_2)) \right)$$

とおく.

$\pi : FG(S_1 \sqcup S_2) \to G_1 * G_2$ を商写像とし,

$\pi_k : FG(S_k) \to G_k \quad (k=1,2)$

群準同型 $j_k : G_k \to G_1 * G_2$ を

$$j_k \circ \pi_k = \pi|_{FG(S_k)}$$

を満たす唯一つのものとする.

(Thm 12.3.6)

$$\begin{tikzcd}
FG(S_k) \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "\pi_k"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & FG(S_1 \sqcup S_2) \arrow[d, "\pi"] \\
G_k \arrow[r, "j_k"'] & G_1 * G_2
\end{tikzcd}$$

Thm 13.13

こαとき

$\left(G_1 * G_2 = \langle S_1 \sqcup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle, j_1, j_2 \right)$

は $G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$, $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$

の自由積

(演習問題)

□

メモ　自由積と直積は別物

可換有限群

Ex 13.1.4 : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は 非可換無限群

（演習問題参照）

§13.2 融合積

設定: G_1, G_2, H : 群

$i_k : H \to G_k$: 群準同型 $(k=1,2)$

Def 13.2.1: Z : 群, $j_k : G_k \to Z$: 群準同型 $(k=1,2)$ with $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$ とする.

(Z, j_1, j_2) : (G_1, G_2, H, i_1, i_2) の融合積

$\underset{\text{def}}{\iff}$ $^{\forall}(\underset{群}{Z'}, \{\underset{群\ hom}{j_k' : G_k \to Z'}\}_{k=1,2})$ with $j_1' \circ i_1 = j_2' \circ i_2$,

$\exists!\ \Phi : Z \to Z'$: 群 hom s.t. $\Phi \circ j_k = j_k'$ $(k=1,2)$

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, dashed, "\exists!\,\Phi"] & & Z' \\
G_1 \arrow[u, "j_1"] \arrow[urr, "j_1'"' near end] & & G_2 \arrow[u, "j_2'"'] \arrow[ull, "j_2" near end] \\
& H \arrow[ul, "i_1"] \arrow[ur, "i_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

Thm 13.2.2. (G_1, G_2, H, i_1, i_2) の融合積は存在する.

また同型を除いて一意.

Pf: 一意性: 略

構成: $G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle$, $G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ とする.

また A を H の生成系とする.

各 $a \in A$ について

$i_k(a) = \pi_k(\tilde{a}_k)$ となる $\tilde{a}_k \in FG(S_k) \subset FG(S_1 \sqcup S_2)$

$(k=1,2)$ を fix.

$$R_H := \{ \hat{a}_1 \cdot \hat{a}_2^{-1} \mid a \in A \} \subset FG(S_1 \sqcup S_2)$$

$FG(S_2)$ での逆元

とおく.

$FG(S_1 \sqcup S_2)$ での積

$$G_1 *_H G_2 := \langle S_1 \sqcup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_H \rangle$$ とおく.

$\pi : FG(S_1 \sqcup S_2) \to G_1 *_H G_2$ を商写像とし,

$\pi_k : FG(S_k) \to G_k \quad (k=1,2)$

群準同型 $j_k : G_k \to G_1 *_H G_2$ を

$$j_k \circ \pi_k = \pi|_{FG(S_k)}$$

を満たす唯一つのものとする.

(Thm 12.3.6)

$$\begin{tikzcd} FG(S_k) \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "\pi_k"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & FG(S_1 \sqcup S_2) \arrow[d, "\pi"] \\ G_k \arrow[r, "j_k"'] & G_1 *_H G_2 \end{tikzcd}$$

Thm 13.2.3 :

$(G_1 *_H G_2, j_1, j_2)$ は

(G_1, G_2, H, i_1, i_2) の融合積

(演習問題)

Ex 13.2.4:

$G_1 = \langle a_1, b_1 \mid a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 \rangle$, $G_2 = \langle a_2, b_2 \rangle$

$H = \langle c \rangle$ とし,

$i_k : H \to G_k$: 群 hom $(k=1,2)$ を

$$i_1(c) = a_1 b_1, \quad i_2(c) = a_2 b_2$$

を満たすものとする.

このとき

$$G_1 *_H G_2 = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1,\ a_1 b_1 \bar{b}_2 \bar{a}_2 \rangle$$