

- ① 群の表示 ← いまこ
- ② 群の自由積, 融合積

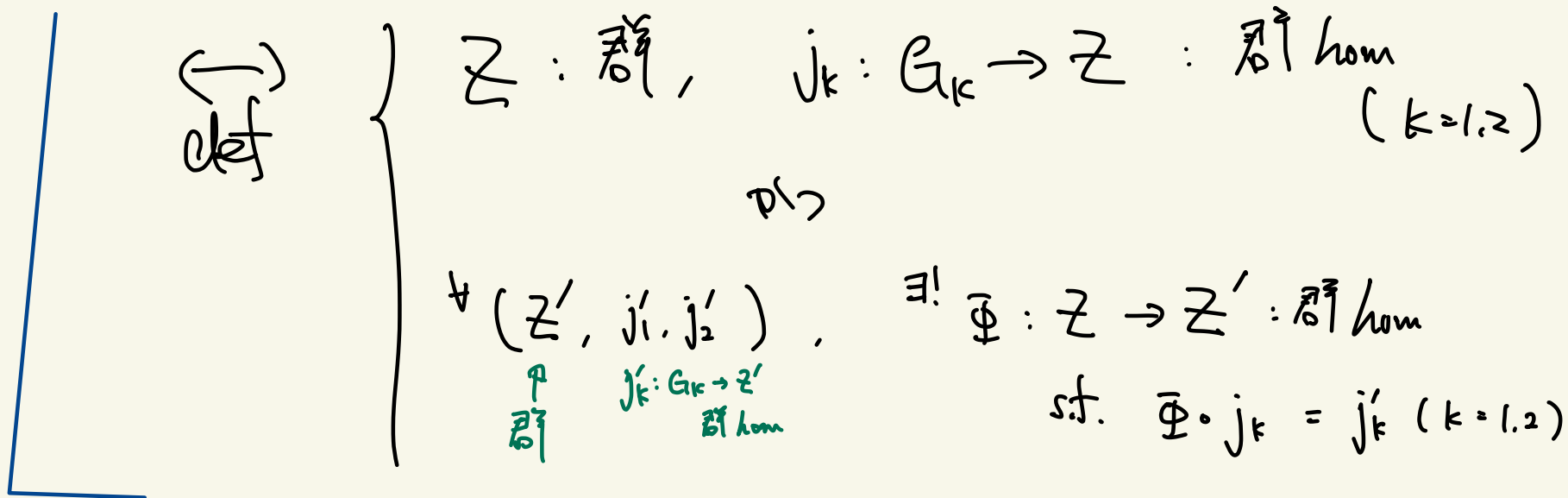
↓

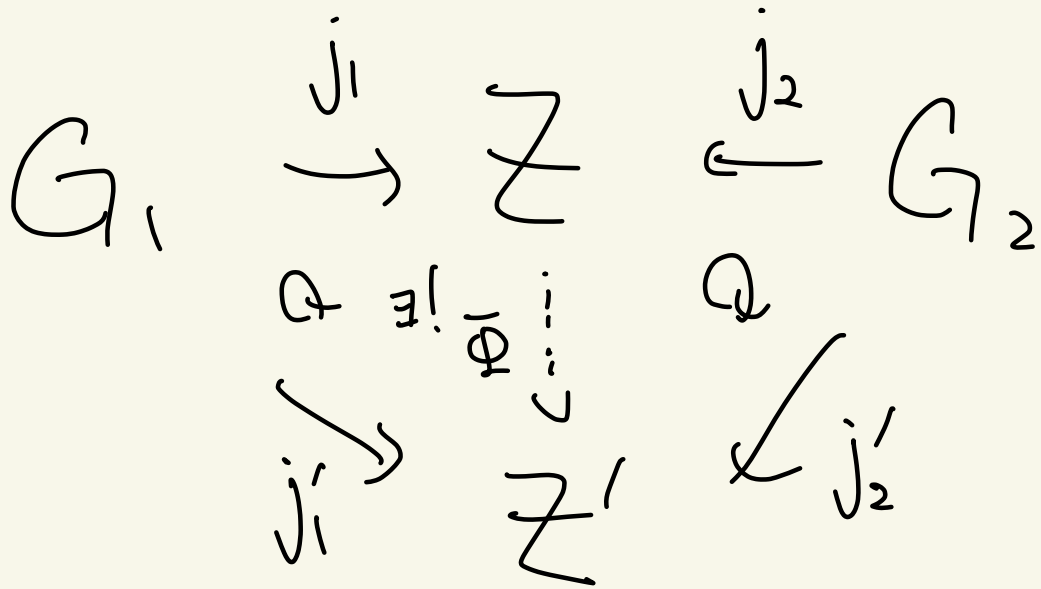
以下: Van Kampen の定理

§ 13.1 : 群の自由積

設定 : G_1, G_2 : 群

Def 13.1.1 : (Z, j_1, j_2) \mathcal{P} G_1, G_2 の自由積





Thm 13.1.2 : G_1, G_2 : 群の族,

自由積は存在可.

子に同型を除いて一意.

Hint :

一意性 : Thm 12.1.5 と同じで可.

構成 : 各 $k=1, 2$ について $G_k = \langle S_k \mid R_k \rangle$ と表示 (可).

($S_k \subset G, R_k \subset FG(S_k)$)

特に $FG(S_k) \subset FG(S_1 \cup S_2)$ の部分群とみたり可.

(演習問題参照.)

特に $R_k \subset FG(S_1 \cup S_2)$ の部分集合とみたり可.

$$G_1 * G_2 := \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle \quad (:= FG(S_1 \cup S_2) / \langle R_1 \cup R_2 \rangle)$$

($R_1 \cup R_2$ の正規因子
in $FG(S_1 \cup S_2)$)

$$\pi : FG(S_1 \cup S_2) \rightarrow G_1 * G_2 \quad \cong \text{商写像 } \cong 1,$$

$$\pi_k : FG(S_k) \rightarrow G_k \quad (k=1,2)$$

商写像同型 $j_k : G_k \rightarrow G_1 * G_2 \cong$

$$j_k \circ \pi_k = \pi|_{FG(S_k)}$$

\cong 満了可同型 $\rightarrow a \in a \in \mathbb{Z}$.

(Thm 12.3.6)

$$\begin{array}{ccc} FG(S_k) & \subset & FG(S_1 \cup S_2) \\ \downarrow \pi_k & \circlearrowright & \downarrow \pi \\ G_k & \xrightarrow{j_k} & G_1 * G_2 \end{array}$$

Thm 13.13

$\exists \alpha \in \mathbb{Z}$

$$(G_1 * G_2 = \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \rangle, j_1, j_2)$$

$$\text{if } G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle, G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$$

の自由積

(演習問題)

□

XE 自由積と直積は別物

↙ 可換有限群

Ex 13.1.4: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は非可換無限群

(演習問題参照)

§ 13.2 融合積

設定: G_1, G_2, H : 群

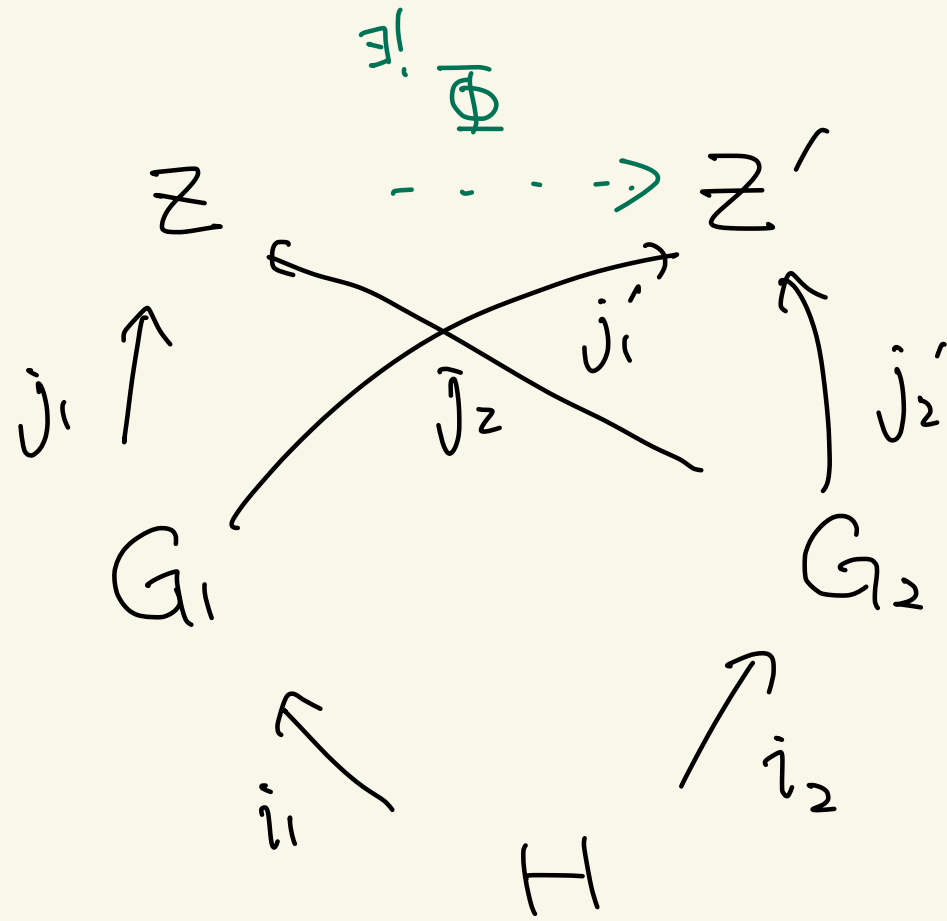
$i_k: H \rightarrow G_k$: 群準同型 ($k=1,2$)

Def 13.2.1: Z : 群, $j_k: G_k \rightarrow Z$: 群準同型 ($k=1,2$)
with $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$ 成立.

(Z, j_1, j_2) : (G_1, G_2, H, i_1, i_2) の融合積

\Leftrightarrow $(Z', \{j'_k: G_k \rightarrow Z'\}_{k=1,2})$ with $j'_1 \circ i_1 = j'_2 \circ i_2$,
def 群 群 hom

$\exists! \Phi: Z \rightarrow Z'$: 群 hom s.t. $\Phi \circ j_k = j'_k$ ($k=1,2$)



Thm 13.2.2 . (G_1, G_2, H, i_1, i_2) の融合積は存在可也.

証明 = 同型を除いて一意.

Pf: 一意性: 略

構成: $G_1 = \langle S_1 \mid R_1 \rangle, G_2 = \langle S_2 \mid R_2 \rangle$ と可也.

証明 = $A \in H$ の生成系と可也.

各 $a \in A$ ($i=1,2$)

$i_k(a) = \pi_k(\tilde{a}_k)$ と可也 $\tilde{a}_k \in FG(S_k) \subset FG(S_1 \cup S_2)$
($k=1,2$) と可也.

$$R_H := \{ \tilde{a}_1 \cdot \tilde{a}_2^{-1} \mid a \in A \} \subset \text{FG}(S_1 \cup S_2)$$

\tilde{a}_2^{-1} は $\text{FG}(S_2)$ の元
 \tilde{a}_1 は $\text{FG}(S_1 \cup S_2)$ の元

と決める。

$$G_1 *_H G_2 := \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_H \rangle \text{ と決める。}$$

$$\pi : FG(S_1 \cup S_2) \rightarrow G_1 *_H G_2 \quad \cong \text{商写像 } \cong 1,$$

$$\pi_k : FG(S_k) \rightarrow G_k \quad (k=1,2)$$

商写同型 $j_k : G_k \rightarrow G_1 *_H G_2 \cong$

$$j_k \circ \pi_k = \pi|_{FG(S_k)}$$

\cong 满射可唯一 $\rightarrow a \in a \in \mathbb{Z}$.

(Thm 12.3.6)

$$FG(S_k) \subset FG(S_1 \cup S_2)$$

$$\downarrow \pi_k$$

\circlearrowright

$$\downarrow \pi$$

$$G_k$$

$$\longrightarrow$$

$$G_1 *_H G_2$$

$$j_k$$

Thm 13.2.3 :

$(G_1 *_H G_2, j_1, j_2)$ は

(G_1, G_2, H, i_1, i_2) の融合積

(演習問題)

Ex 13.2.4:

$$G_1 = \langle a_1, b_1 \mid a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 \rangle, \quad G_2 = \langle a_2, b_2 \rangle$$

$$H = \langle c \rangle$$

\wr

$$i_k: H \rightarrow G_k : \text{hom } (k=1,2) \exists$$

$$i_1(c) = a_1 b_1$$

\exists 清 $\bar{a} \in a \geq \bar{a} d$.

$$i_2(c) = a_2 b_2$$

$\exists a \geq \bar{a}$

$$G_1 *_H G_2 = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1, a_1 b_1 \bar{b}_2 \bar{a}_2 \rangle$$