これまで　Part I：ホモトピー

Part II：基本群

これから　Part III：被覆写像

Xを"ほどいた"もの

ゴール：X：弧状連結空間，$\pi: \tilde{X} \to X$：普遍被覆

$\rightsquigarrow X \simeq \tilde{X}/\pi_1(X,*)$

Xの研究 ⟵ $\tilde{X}$の研究 ＋ $\pi_1(X,*)$の研究

（ガロア理論は時間の都合上断念…）

（Section 1）

§15：ファイバー束，被覆写像．

§15.1：局所切断

設定：E, X：位相空間，

$\pi \in C(E, X)$.

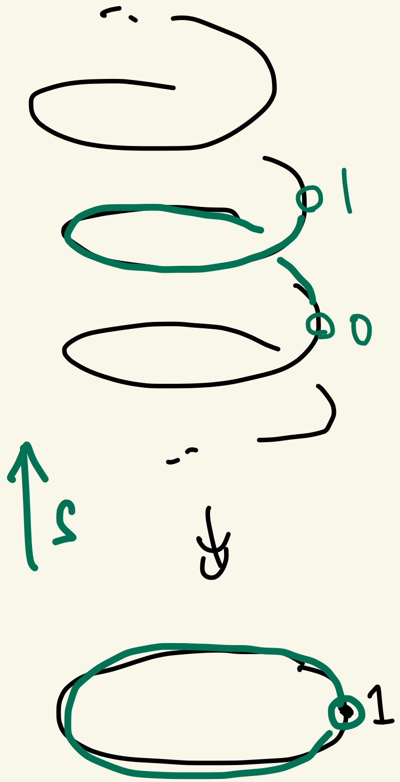
Def 15.1.1：$s \in C(X, E)$ が π の（連続）切断 section

$\overset{\text{def}}{\iff} \pi \circ s = \mathrm{id}_X$

Def 15.1.2：(U, s) が π の（連続）局所切断 local section

$\overset{\text{def}}{\iff} U \subset X$: open，$s \in C(U, E)$，$(\pi \circ s)(x) = x$ $(\forall x \in U)$

Ex 15.1.3 : $\pi : \mathbb{R} \to S^1,\ \theta \mapsto \exp 2\pi i \theta$ について



$U := S^1 \setminus \{1\}$ とすると

$\pi|_{(0,1)} : (0,1) \to U,\ \theta \mapsto \exp 2\pi i\theta$ は同相.

逆写像を $s : U \to (0,1) \subset \mathbb{R}$ とすると,

(U, s) は π の local section

§15.2：ファイバー束

設定：E, X, F：位相空間

$\pi \in C(E, X)$

Def 15.2.1：(U, φ)：π の F-局所自明化
local trivialization

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $U \subset X$：open，

$\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$：同相 with $p_U \circ \varphi = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$

（ただし $p_U : U \times F \to U$：射影）

- $\mathcal{LT}_F(\pi) := \{(U, \varphi) \mid F\text{-local trivialization of } \pi\}$

とおく．

Ex 15.2.2 : $E := \mathbb{R}$, $X := S^1$,

$\pi : \mathbb{R} \to S^1$, $\theta \mapsto \exp(2\pi i \theta)$ について

Ex 15.2.1 の local section ($U = S^1 \setminus \{1\}$, $s : U \xrightarrow{\sim} (0,1) \subset \mathbb{R}$) を考える.

$\pi^{-1}(U) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ に注意.

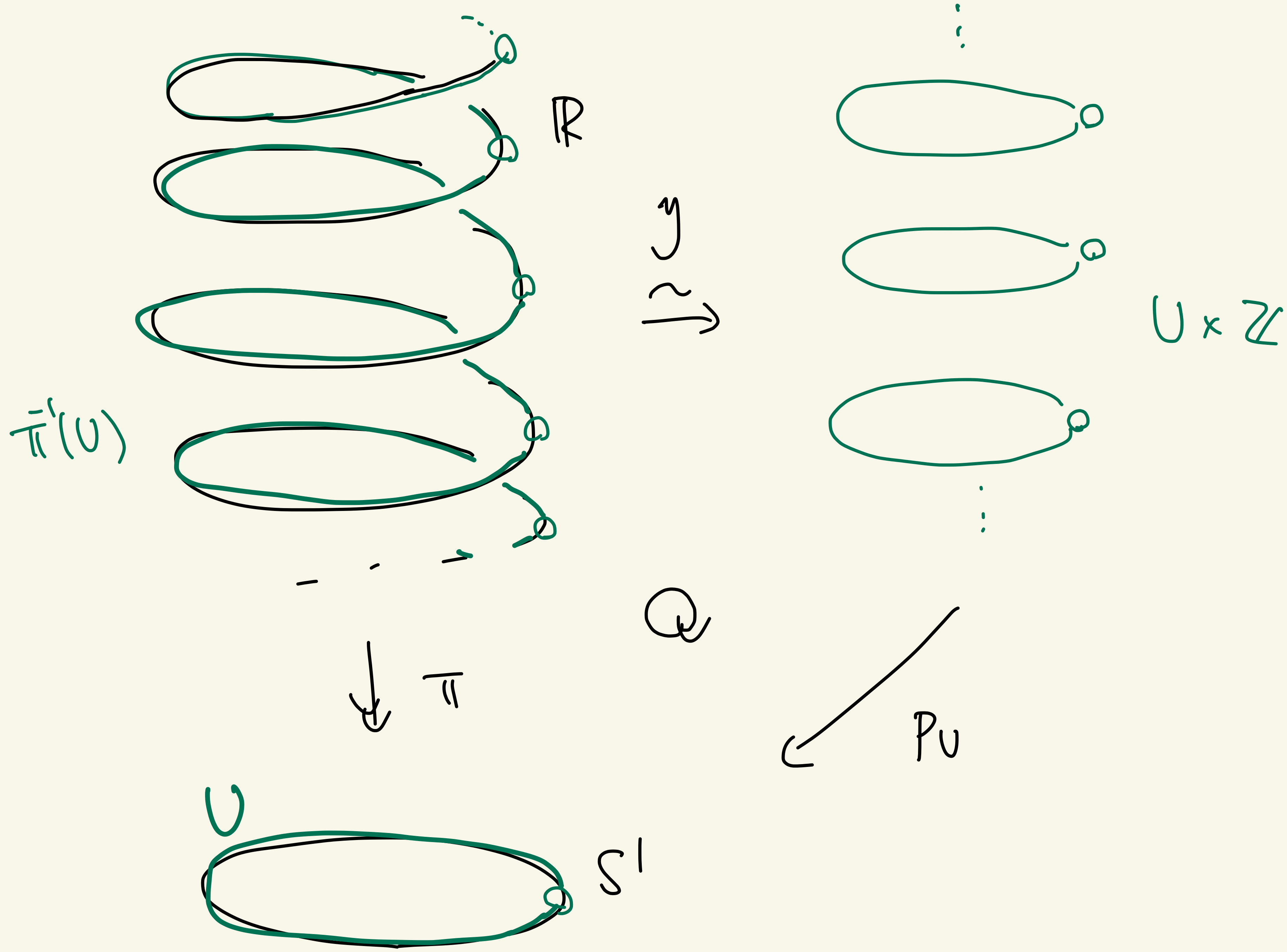
$F := \mathbb{Z}$ について

θ の小数切り捨て

$g : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{Z}$, $\theta \mapsto (\pi(\theta), \lfloor \theta \rfloor)$

おくと,

(U, g) は π の local section



$\mathbb{R}$
$\pi^{-1}(U)$
$\overset{\psi}{\underset{\sim}{\longrightarrow}}$
$U \times \mathbb{Z}$
π
p_U
U
S^1

Def 15.2.3: $\pi: E \to X$ が F-ファイバー束
fiber bundle

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\displaystyle\bigcup_{(U,\varphi)\in LT_F(\pi)} U = X$

(i.e. $\forall x \in X$, $\exists (U,\varphi) \in LT_F(\pi)$ s.t. $x \in U$)

Prop 15.2.4: X, Y: 位相空間とする.

射影 $p_X: X \times Y \to X$ は Y-ファイバー束

(ファイバー束は"直積の一般化")

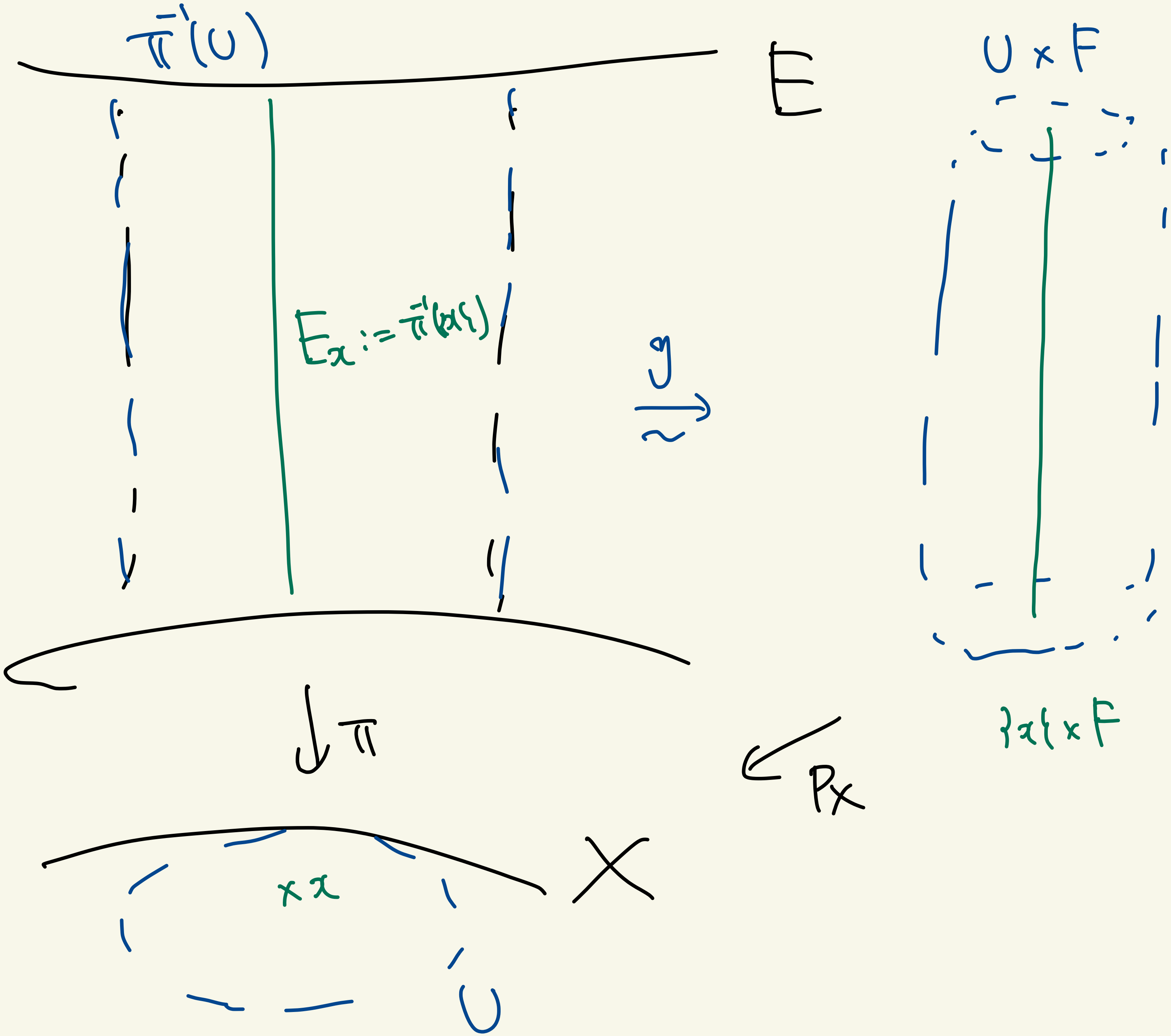
用語：$\pi: E \to X$：F-ファイバー束のとき

$$\left(\begin{array}{l} E：全空間 \text{ (total space)} \\ X：底空間 \text{ (base space)} \\ F：典型ファイバー \text{ (typical fiber)} \end{array}\right. \quad \text{という.}$$

Prop 15.2.5：$\pi: E \to X$ を F-ファイバー束とする.

各 $x \in X$ について $E_x := \pi^{-1}(\{x\}) \subset E$ （x における π のファイバー）

は F と同相


$\pi^{-1}(U)$
E
$U \times F$
$E_x := \pi^{-1}(\{x\})$
g
$\cong$
π
p_X
$\{x\} \times F$
$\times x$
X
U

Def 15.2.5: F：離散空間のとき

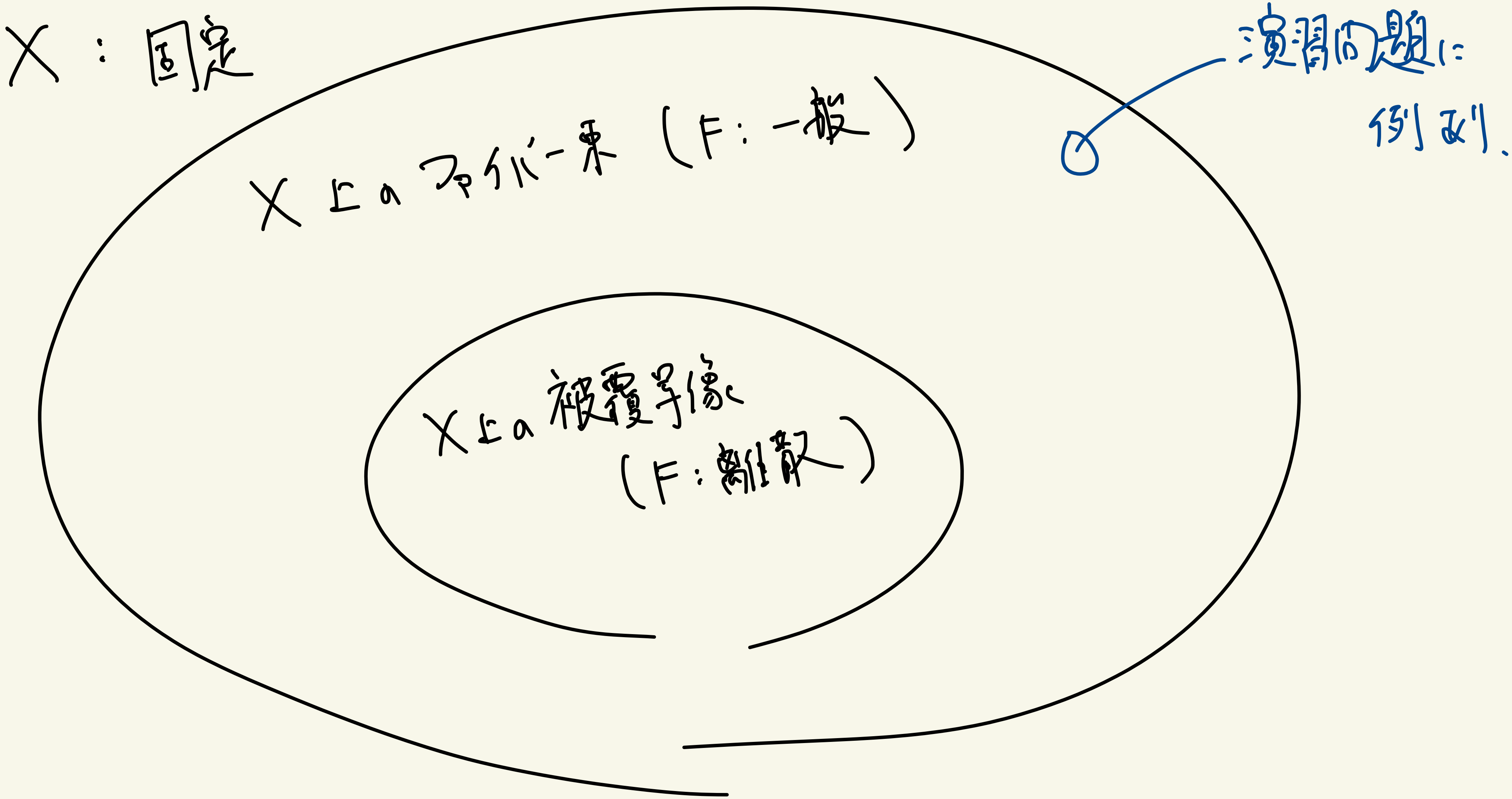
F-ファイバー束を F-被覆写像という。
covering map

Thm 15.2.6:

$\pi : \mathbb{R} \to S^1,\ \theta \mapsto \exp(2\pi i \theta)$

は $\mathbb{Z}$-被覆写像

(cf. 演習問題 117)



Remark : "被覆写像" をもう少し広い意味で Def する場合も多い.

§15.3：被覆準同型

設定： X：位相空間

$\pi_k : E_k \to X$ ： F_k-被覆写像 $(k=1,2)$

Def 15.3.1： $f \in C(E_1, E_2)$ が

π_1 から π_2 への被覆準同型 on X

covering homomorphism

(cov-hom)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\pi_2 \circ f = \pi_1$

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & \circlearrowleft & E_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Prop 15.3.2 :

- "cov-hom" は合成で閉じる.
- 恒等写像は cov-hom.

Def 15.3.3 : $f \in C(E_1, E_2)$ が

π_1 から π_2 への 被覆同型

covering isomorphism

(cov-isom)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f: E_1 \to E_2$: 同相 かつ

f : cov-hom from π_1 to π_2,

Prop 15.3.4 : cov-isom の 逆写像 も cov-isom.

Prop 15.3.5: $\pi : E \to X$: F-ファイバー束とする.

$\mathrm{Aut}(\pi) := \{ f : E \to E \mid \pi$ から π への被覆同型$\}$

とおくと,

$\mathrm{Aut}(\pi)$ は群をなす.

π の被覆変換群

Ex 15.3.6 : $\mathbb{Z}$・被覆写像 $\pi : \mathbb{R} \to S^1,\ \theta \mapsto \exp(2\pi i\theta)$

を考える.

各 $k \in \mathbb{Z}$ について

$R_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \theta \mapsto \theta + k$ とおくと

$R_k \in \mathrm{Aut}(\pi)$.

また $\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\pi),\ k \mapsto R_k$ は群同型

(全射性は非自明)

後で一般論でやる.