§16：被覆写像の path lift

1/31：追記
条件はずして問題ない

ゴール：

$\pi : E \to X$: F-被覆写像 とする。

E：単連結
X：弧状連結（局所弧状連結）
F：離散

$a \in X$

このとき $\pi_1(X, a) \underset{1:1}{\longleftrightarrow} F$

§16.1：ファイバー束におけるPath liftの存在

位相空間

設定： $\pi : E \to X$ ： F-ファイバー束

$a, b \in X$

$\hat{a} \in E_a \ (:= \pi^{-1}(\{a\}) \subset E)$

記号： $\mathrm{Path}(E, \hat{a}, E_b) \to \mathrm{Path}(X, a, b)$

$l \mapsto l_\pi := \pi \circ l$

Thm 16.1.1 : $\forall \gamma \in \mathrm{Path}(X, a, b)$, $\exists \tilde{\gamma} \in \mathrm{Path}(E, \hat{a}, E_b)$

s.t. $\tilde{\gamma}_\pi = \gamma$.

$$\left(\begin{array}{c} \| \\ \pi \circ \gamma \end{array} \right)$$

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "F"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", shift right=3] & X \end{tikzcd}$$

特に

$$\mathrm{Path}(E, \tilde{a}, E_b) \to \mathrm{Path}(X, a, b) \text{ は全射}$$

$$\ell \mapsto \ell_\pi := \pi \circ \ell$$

Hint $\forall \gamma \in \mathrm{Path}(X, a, b)$ を fix

Case 1 : $\exists (U, \varphi) \in LT_F(\pi)$ s.t. $\gamma(I) \subset U$ のとき

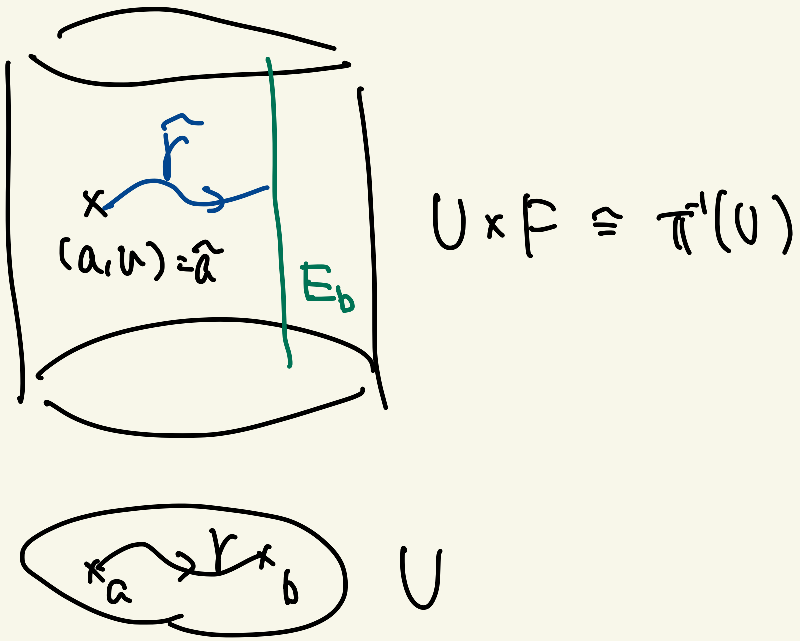
$\pi^{-1}(U)$ と $U \times F$ を φ で同一視し

$\tilde{a} = (a, v)$ となる $v \in F$ をとり、

$\hat{\gamma}(t) = (\gamma(t), v) \in U \times F$

とおけば良い

$$\begin{tikzcd} & U \times F \arrow[d, "p_U"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \pi^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi"] \\ I \arrow[ur, "\hat{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowright"] & U & \end{tikzcd}$$



Case 2: 一般の場合

ルベーグ数 (cf. Section 9.5) の議論から

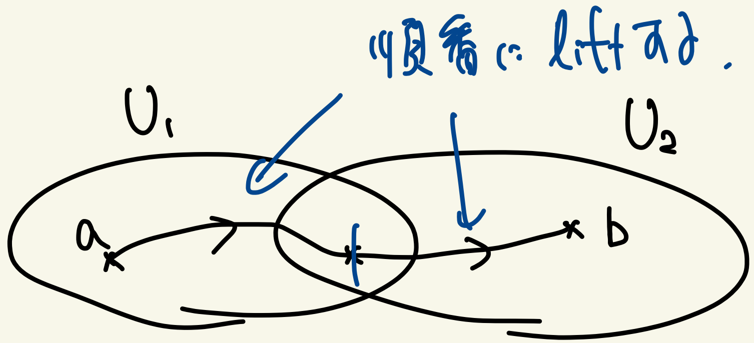
$0 = {}^{\exists}\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_{n-1} < \tau_n = 0$, ${}^{\exists}\{(U_q, g_q)\}_{q=1,\cdots,n} \subset LT_F(\pi)$

s.t. $\gamma(I_q) \subset U_q \quad (q=1,\cdots,n)$

$\left(I_q := [\tau_{q-1}, \tau_q] \right)$

$I = \underset{[0,\tau_1]}{\underset{\shortparallel}{I_1}} \cup \underset{[\tau_1,\tau_2]}{\underset{\shortparallel}{I_2}} \cup \cdots \cup I_n$ において $\gamma|_{I_1}, \cdots, \gamma|_{I_n}$ の順番に

Case 1 の議論で lift を構成すればよい。



似たギロンで次も示せる。(詳細略)

Thm 16.1.2:

$$H \in C(I \times I, X)$$

$$\widetilde{\gamma}_0 \in C(I, E)$$

とし、 $H \circ \iota_0 = \pi \circ \widetilde{\gamma}_0$ とする。 $\left(\begin{array}{l} \iota_0 : I \to I \times I, \\ \quad s \mapsto (s, 0) \end{array} \right)$

このとき $\exists\, \widehat{H} \in C(I \times I, E)$

s.t. $\pi \circ \widetilde{H} = H$ かつ $\widehat{H} \circ \iota_0 = \widetilde{\gamma}_0$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\widetilde{\gamma}_0"] \arrow[d, "\iota_0"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\
I \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{H}"] & X
\end{tikzcd}$$

Cor 16.1.3

$\gamma, \gamma' \in \mathrm{Path}(X, a, b)$ with $[\gamma]_b = [\gamma']_b$ を fix

また $\tilde{\gamma} \in \mathrm{Path}(E, \tilde{a}, E_b)$ を $\tilde{\gamma}_\pi = \tilde{\gamma}$ を満たすものとする.

このとき $\exists\, \tilde{\gamma}' \in \mathrm{Path}(E, \tilde{a}, E_b)$ s.t. $\tilde{\gamma}'_\pi = \gamma'$ かつ

$$[\tilde{\gamma}]_b = [\tilde{\gamma}']_b$$

⇐ $\exists\, \tilde{H} \in C(I \times I, E)$: ホモトピー from $\tilde{\gamma}$ to $\tilde{\gamma}'$

s.t. $\begin{cases} \tilde{H}(\{0\} \times I, \tilde{a}) \\ \tilde{H}(\{1\} \times I, E_b) \end{cases}$

境界条件

§16.2：局所弧状連結性

設定：X：位相空間

Def 16.2.1：X が局所弧状連結 (locally-path connected)

$\iff$ $^{\forall}x \in {}^{\forall}U \underset{\text{open}}{\subset} X$,

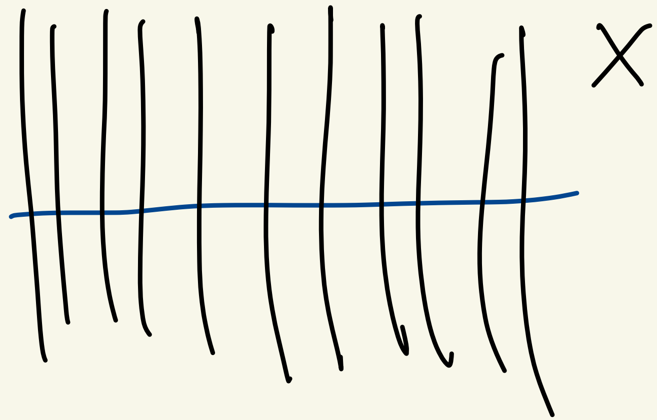
$x \in {}^{\exists}V \underset{\text{open}}{\subset} U \underset{\text{open}}{\subset} X$ s.t. V は弧状連結

Prop 16.2.2：多様体は局所弧状連結

Ex 16.2.3: $X = \mathbb{R}\times\{0\} \cup \mathbb{Q}\times\mathbb{R} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ とする.

Xは弧状連結だが

局所弧状連結ではない.



Prop 16.2.4 : X : 局所弧状連結とする.

- X の開集合は局所弧状連結
- 各 $x \in X$ について
  $\{x\}_{path} := \{ y \in X \mid x \underset{path}{\sim} y \}$ は open in X

easy

§16.3：被覆写像におけるリフトの一意性

(X：局所弧状連結空間) ← 1/31：追記 条件からはずして問題なし

設定：$\pi : E \to X$: F-被覆写像

Ω：連結

$\omega_0 \in \Omega$

Thm 16.3.1：$\hat{f}_1, \hat{f}_2 \in C(\Omega, E)$: $\pi \circ \hat{f}_1 = \pi \circ \hat{f}_2$ かつ $\hat{f}_1(\omega_0) = \hat{f}_2(\omega_0)$ とする。

このとき $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ \Omega \arrow[ur, shift left, "\hat{f}_1"] \arrow[ur, shift right, "\hat{f}_2"'] \arrow[r, "\pi\circ\hat{f}_1 = \pi\circ\hat{f}_2"'] & X \end{tikzcd}$$

準備

1/31 追記：正しいけど使わない

Prop 16.3.2 :

$$\bigcup_{\substack{(U,F)\in LT_F(\pi) \\ U:\text{弧状連結}}} U = X$$

Hint : Prop 16.2.4

Thm 16.3.1 a Hint

$\Omega_c := \{\omega \in \Omega \mid \tilde{f}_1(\omega) = \tilde{f}_2(\omega)\} \subset \Omega$ とおく.

示) $\Omega_c = \Omega$.

$\omega_0 \in \Omega_c$ に注意

Ω の連結性より以下を示せばよい.

示) $\Omega_c \subset \Omega$: open かつ closed.

以下 $f := \pi \circ \tilde{f}_1 = \pi \circ \tilde{f}_2 \in C(\Omega, X)$ とおく.

~~Lem 16.1.2: $(U, y) \in LT_F(\pi)$: U : 弧状連結 とする.~~

~~このとき $f^{-1}(U) \subset \Omega_c$ or $f^{-1}(U) \subset \Omega \setminus \Omega_c$~~

誤: おそらく反例あり

修正版は次ページ

~~Prop 16.3.2~~ 不要

& 以下略

"F: 離散" が重要!

Lem 16.1.2: $(U,g)\in \mathcal{LT}_F(\pi)$ とする.

このとき $f^{-1}(U)\cap\Omega_c$, $f^{-1}(U)\cap(\Omega\setminus\Omega_c)$ は共に open in Ω

$$f^{-1}(U) \overset{\tilde f_1}{\underset{\tilde f_2}{\rightrightarrows}} \pi^{-1}(U) \overset{g}{\xrightarrow{\sim}} U\times F \xrightarrow{p_F} \underset{離散}{F}$$ を考え

$\hat f_k := p_F\circ g\circ \tilde f_k : f^{-1}(U)\to F$ とおく $(k=1,2)$

このとき各 $\omega\in f^{-1}(U)$ について $\hat f_1(\omega)=\hat f_2(\omega) \Leftrightarrow \tilde f_1(\omega)=\tilde f_2(\omega)$ である.

要確認.

特に $(\hat f_1,\hat f_2): f^{-1}(U)\to F\times F$, $\omega\mapsto(\hat f_1(\omega),\hat f_2(\omega))$ とすると

$f^{-1}(U)\cap\Omega_c = (\hat f_1,\hat f_2)^{-1}(\mathrm{diag}\,F)$ は open & closed in $f^{-1}(U)$

($\because$ $\mathrm{diag}\,F\subset F\times F$: open & closed, $(\hat f_1,\hat f_2)$: 連続)

$f^{-1}(U)$ は open in Ω なので

$f^{-1}(U)\cap\Omega_c$, $f^{-1}(U)\cap(\Omega\setminus\Omega_c)$ は open in Ω.

いま $\{f^{-1}(U)\}_{(U,y)\in \mathcal{LT}_F(\pi)}$ は Ω の 開セット

Lem 16.1.2 より

$$f^{-1}(U)\cap \Omega_c \underset{\text{open}}{\subset} \Omega$$

$$f^{-1}(U)\cap (\Omega\setminus\Omega_c) \underset{\text{open}}{\subset} \Omega \qquad ({}^{\forall}(U,y)\in \mathcal{LT}_F(\pi))$$

よって Ω_c と $(\Omega\setminus\Omega_c)$ は 共に open in Ω ∎

特に Ω_c は open かつ closed in Ω

Cor 16.3.3. $a, b \in X$, $\tilde{a} \in E_a$ とする.

- $\mathrm{Path}(E, \tilde{a}, E_b) \to \mathrm{Path}(X, a, b)$ は全単射.

$$\begin{array}{ccc} l & \mapsto & l_\pi := \pi \circ l \\ \tilde{\gamma} & \mapsfrom & \gamma \end{array}$$

- $\Pi(E, \tilde{a}, E_b) \to \Pi(X, a, b)$ も全単射

$$\Pi(E, \tilde{a}, E_b) = \coprod_{\tilde{b} \in E_b} \Pi(E, \tilde{a}, \tilde{b})$$

$$\begin{array}{ccc} [l]_b & \longmapsto & [l_\pi]_b \\ [\tilde{\gamma}]_b & \longmapsfrom & [\gamma]_b \end{array}$$

Lem 16.3.4 $\Pi(E, \tilde{a}, E_b) = \mathrm{Path}(E, \hat{a}, E_b)/\sim_{h.b.}$ ($\because E_b$: 離散)

§16.4: 単連結被覆と基本群

設定　X : 弧状連結, ~~局所弧状連結~~空間

E : 単連結空間

F : 離散空間

$\pi : E \to X$: F-被覆写像.

$a \in X$, $\hat{a} \in E_a$

記号 :

$$\mathrm{Path}(E, \hat{a}, E_a) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Loop}(X, a)$$

$$l \longmapsto l_\pi$$

$$\tilde{\gamma} \longleftarrow\!\shortmid \gamma$$

$(\cong F)$

Thm 16.4.1 : $\pi_1(X, a) \to E_a$ は well-defined で全単射.

$$[\gamma]_b \mapsto \tilde{\gamma}(1)$$

(Section 9 の話の一般化)

Proof : E は単連結なので各 $\tilde{a}' \in E_a$ について

$\Pi(E, \tilde{a}, \tilde{a}')$ は一点集合.

特に $\Pi(E, \hat{a}, E_a) := \bigsqcup_{\tilde{a}' \in E_a} \Pi(E, \hat{a}, \tilde{a}') \to E_a$

$$[l]_b \mapsto l(1)$$

は全単射

従って

Cor 16.1.2

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(X,a) := \pi(X,a,a) & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \pi(E,\hat{a},E_a) & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & E_a \\ [\gamma]_b & \longmapsto & [\tilde{\gamma}]_b & \longmapsto & \hat{\gamma}(1) \end{array}$$

は well-defined で全単射

Ex 16.4.2: 弧状連結，局所弧状連結空間

$$X = \begin{cases} S^1 : \text{円周} \\ T^2 = S^1 \times S^1 : \text{トーラス} \\ KB : \text{クラインのつぼ} \\ \mathbb{R}P^2 : \text{射影平面} \end{cases}$$ を考える.

それぞれ

$\pi : E \to X$ として

$\mathbb{R} \xrightarrow{\pi} S^1$: $\mathbb{Z}$-被覆

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi} T^2$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-被覆

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi} KB$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-被覆

$S^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}P^2$: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-被覆

単連結

を考える.

Thm 16.41 より $a \in X$ について

$$\pi_1(X, a) \xrightarrow{1:1} E_a \cong F$$

$$[\gamma] \mapsto \hat{\gamma}(1)$$

特に

$$\pi_1(S^1, a) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{Z}$$

$$\pi_1(T^2, a) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\pi_1(KB, a) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2, a) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

<u>注意</u>

"群"としての同型ではない