§17：普遍被覆

各種証明については

河澄響矢：トポロジーの基礎(下)，東大出版

がおすすめ（第5章）

§17.1：普遍被覆

設定：X：弧状連結空間

X上の弧状連結セグメントの全体

記号：$\mathrm{Cov}(X) := \left\{ (E, F, \pi) \;\middle|\; \begin{array}{l} E：\text{弧状連結空間} \\ F：\text{離散空間} \neq \emptyset \\ \pi：E \to X：F\text{-被覆写像} \end{array} \right\}$

通常の意味の集合ではないが、あまり気にしないこととする。

Def 17.1.1 : $(E, F, \pi) \in \mathrm{Cov}(X)$ が:

X 上の普遍被覆 (universal covering)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall a \in X$, $\forall y \in E_a$

$\forall (E', F', \pi') \in \mathrm{Cov}(X)$,

$\forall y' \in E'_a$,

$\exists!\, f = f_{a,y,y'} : E \to E'$: 被覆準同型 s.t. $f(y) = y'$

$(f \in C(E, E'),\ \pi = \pi' \circ f)$

Prop 17.1.2 : X 上の普遍被覆は同型を除いて一意.

i.e. (E, F, π), (E', F', π') : 普遍被覆 on X について

各 $a \in X$, $y \in E_a$, $y' \in E'_a$ に対して

$\exists! \ \Phi = \Phi_{a,y,y'} : E \to E'$: 被覆同型

easy

Q : 普遍被覆は存在する?

設定：X：弧状連結，
局所弧状連結 かつ 半局所単連結 な位相空間

あとで紹介

☆ Thm 17.1.3：

証明略
(やや大変)

このとき 以下が成り立つ：

(1) $^\exists(\hat{X}, F, \pi) \in \mathrm{Cov}(X)$ s.t. $\hat{X}$：単連結

(2) $^\forall(\hat{X}, F, \pi) \in \mathrm{Cov}(X)$ with $\hat{X}$：単連結，
$(\hat{X}, F, \pi)$ は X 上の普遍被覆

Cor 17.1.4：上の設定において

- X は普遍被覆をもつ
- 普遍被覆 $\Leftrightarrow$ 単連結被覆

§17.2 : 半局所単連結性

設定 : X : 位相空間

Def 17.2.1 X : 半局所単連結 (semi locally simply-connected)

$\overset{\Leftrightarrow}{\text{def}}$ $\forall x \in X$, $\exists U$: x a open nbd in X

s.t. $i_*(\pi_1(U, x)) \subset \pi_1(X, x)$

が自明

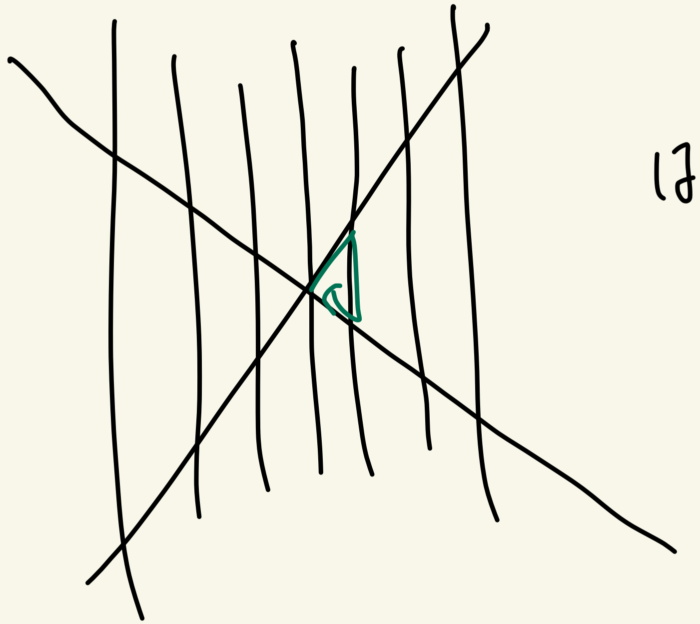
($i : U \hookrightarrow X$ は包含)

Prop 17.2.2 : 単連結 ⇒ 半局所単連結

Prop 17.2.3: 多様体は半局所単連結

Ex 17.2.4:

$$X = \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \cup \{x_1 = x_2\} \cup \{x_1 = -x_2\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$



は半局所単連結ではない.

Prop 17.2.5: X：弧状連結とする.

$\exists \tilde{X}$：単連結空間, $\exists F$：離散空間 $\neq \emptyset$,

$\exists \pi : \tilde{X} \to X$: F-被覆写像

$\Rightarrow$ Xは半局所単連結

∵ $x \in X$ を fix

$(U, g) \in LT_F(\pi)$ with $x \in U$ を fix

$v \in F$ を fix. $U_v := U \times \{v\} \underset{\text{open}}{\subset} U \times F$ とおく.

$$\begin{array}{ccccccc} U & \to & U_v & \xrightarrow{g^{-1}|_{U_v}} & \pi^{-1}(U) \subset \tilde{X} & \xrightarrow{\pi} & X \\ u & \mapsto & (u,v) & & & & \end{array}$$

は $\iota : U \to X$ の分解.

特に $\iota_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ を

$$\pi_1(U, x) \to \pi_1(U_v, (x,v)) \to \pi_1(\pi^{-1}(U), g^{-1}(x,v)) \to \underline{\pi_1(\tilde{X}, g^{-1}(x,v))} \to \pi_1(X, x)$$

↑自明

と分解できる.

$\square$