§14: 普遍被覆への基本群の作用

各種証明については

河澄響矢：トポロジーの基礎（下），東大出版

がおすすめ（第5章）

§18.1 : 離散群の真性不連続作用

設定 : E : 位相空間

Γ : 離散群（群に離散位相を入れたもの）

$\rho : \Gamma \times E \to E$: Γ の E への作用, 連続

$(g, y) \mapsto g \cdot_{\rho} y$

Def 18.1.1 : ρ が真性不連続

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in E, {}^{\exists} V$: x の open nbd in E

s.t. $\forall g \in \Gamma$ with $g \neq e_{\Gamma}$,

$gV \cap V = \emptyset$

Ex 18.1.2 $\mathbb{Z} \overset{\rho}{\curvearrowright} \mathbb{R}$ を $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と定めると,

$(k, r) \mapsto k + r$

ρ は真性不連続

$\left(\because \ \forall x \in X \text{ について } V = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R} \right.$

$\left. \text{とおけばよい} \right)$

記号：各 $y \in E$ について

$$\Gamma \cdot y := \{ g \cdot y \mid g \in G \} \subset E$$ とおく．

y の Γ-orbit

$$\Gamma \backslash E := \{ \Gamma \cdot y \mid y \in E \}$$ とし

$\varpi_\Gamma : E \twoheadrightarrow \Gamma \backslash E,\ y \mapsto \Gamma \cdot y$ とおく．

$\Gamma \backslash E$ には E から商位相を入れる（orbit space）

Prop 18.1.3: $\pi: E \to X$: F-被覆写像とする

easy

このとき $\mathrm{Aut}(\pi)$ を離散群とみなせば

$$\rho: \mathrm{Aut}(\pi) \times E \to E \quad \text{は真性不連続}$$
$$(f, y) \mapsto f(y)$$

Def 18.1.4: π が正則 $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Aut}(\pi)$ は各ファイバーに推移的

(i.e. $\forall a \in X$, $\forall y_1, y_2 \in E_a$,
$\exists f \in \mathrm{Aut}(\pi)$ s.t. $f(y_1) = y_2$)

Prop 18.1.5

π: 正則 $\Rightarrow$ $\mathrm{Aut}(\pi) \backslash E \cong X$

Thm : 11.1.3 : $\Gamma \overset{\rho}{\curvearrowright} E$: 真性不連続 とする.

easy

このとき $\varpi_\Gamma : E \to \Gamma\backslash E$ は 正則 Γ-covering.

また $\Gamma \cong \mathrm{Aut}(\varpi_\Gamma)$

§ 18.2：普遍被覆と基本群

設定：X：弧状連結，局所弧状連結，半局所単連結な位相空間

$(\tilde{X}, F, \pi)$：X の普遍被覆（$\tilde{X}$：単連結）

$a \in X$, $\tilde{a} \in \tilde{X}_a$

$\pi_1(X, a)$ を離散群とみなす.

$\rho : \pi_1(X,a) \times \tilde{X} \to \tilde{X}$ を以下で定める.

◎ $\Pi(\hat{\tilde{X}}, \hat{\tilde{a}}, \hat{\tilde{X}}) := \bigsqcup_{\tilde{b} \in \tilde{X}} \Pi(\hat{\tilde{X}}, \hat{\tilde{a}}, \hat{\tilde{b}})$ とおく.

$\Pi(X, \hat{a}, X) := \bigsqcup_{b \in X} \Pi(\hat{X}, \hat{a}, b)$

このとき

$$\begin{array}{ccccc} \Pi(X,a,X) & \to & \Pi(\hat{\tilde{X}}, \hat{\tilde{a}}, \hat{\tilde{X}}) & \to & \hat{\tilde{X}} \\ [\gamma]_b & \longmapsto & [\hat{\tilde{\gamma}}]_b & \mapsto & \hat{\tilde{\gamma}}(1) \end{array}$$

は全単射. (cf. Section 17)

$\tilde{X}$ と $\Pi(X,a,X)$ を同一視する.

$\rho : \pi_1(X,a) \times \Pi(X,a,X) \to \Pi(X,a,X)$ とおく.

$(\alpha, \beta) \mapsto \rho * \bar{\alpha}$

easy

Thm 18.2.1 : ・この ρ は群作用を定める.

・$\rho : \pi_1(X,a) \times \tilde{X} \to \tilde{X}$ とみたとき連続.

さらに真性不連続 面倒

・$\pi_1(X,a) \to \mathrm{Aut}(\pi)$ は well-defined で

$\alpha \mapsto \rho(\alpha, \cdot)$ 群同型.

easy

・$\pi_1(X,a)$ は各ファイバーに推移的 easy

⑩ まとめ

Thm 18.2.2 $\begin{cases} X : 弧状連結, 局所弧状連結, 半局所単連結な位相空間 \\ a \in X \end{cases}$ について

- X の普遍被覆 $(\tilde{X}, F, \pi)$ について（単連結）

  $\pi_1(X, a)$ が $\tilde{X}$ に真性不連続に作用し，

  $$X \cong \pi_1(X, a) \backslash \tilde{X}$$

- 単連結空間 E と離散群 Γ と真性不連続作用 $\Gamma \curvearrowright E$

  が $\Gamma \backslash E \cong X$ となるとき $\pi_1(X, a) \cong \Gamma$