幾何学 B 演習問題 No.1 問 1–問 10
対面発表は問 3, 問 4, 問 6, 問 7, 問 10.

キーワード: ホモトピー

以下, $I := [0,1]$ (閉区間) とおく. また位相空間 X, Y について, $\mathcal{C}(X,Y)$ を X から Y への連続写像全体のなす集合とする.

問 1.「位相空間の間の写像について, その写像が連続であることと, 閉集合の逆像が必ず閉集合になることは同値である」を定式化し, 証明せよ.

問 2. X を位相空間とし, D を X の閉集合とする. D には相対位相を定めておく. A が D の閉集合であるとき, A は X の閉集合でもあることを示せ.

問 3. (対面発表) X を位相空間とし, C_1, C_2 を X の閉集合であって, $C_1 \cup C_2 = X$ を満たすものとする. 各 $i = 1, 2$ について, C_i には相対位相を定めておく. X の部分集合 C について, 以下の二条件が同値であることを示せ:

(1) C は X の閉集合.

(2) 各 $i = 1, 2$ について, $C \cap C_i$ は C_i の閉集合.

問 4. (重要: 対面発表: 貼り合わせ補題) X, Y を位相空間とする. C_1, C_2 を X の閉集合であって, $C_1 \cup C_2 = X$ を満たすものとする. 各 $i = 1, 2$ について, C_i には相対位相を定めておく. 写像 $\phi : X \to Y$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ:

(1) $\phi : X \to Y$ は連続写像.

(2) ϕ は C_1 上, C_2 上でそれぞれ連続.

問 5. $\phi_i : X \times I \to Y$ $(i = 1, 2)$ を連続写像の組であって, $\phi_1(x, 1) = \phi_2(x, 0)$ が任意の $x \in X$ について成り立つものとする. このとき

$$\tilde{\phi} : X \times I \to Y,\ (x,t) \mapsto \begin{cases} \phi_1(x, 2t) & \text{if } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \phi_2(x, 2t-1) & \text{if } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

は写像として well-defined であり, 連続になることを示せ.

問 6. (重要: 対面発表) X, Y を位相空間とする.

(1) 各 $\phi \in \mathcal{C}(X,Y)$ について,

$$H : X \times I \to Y, (x,t) \mapsto \phi(x)$$

は ϕ から ϕ へのホモトピーであることを示せ.

(2) $\phi, \psi \in \mathcal{C}(X,Y)$ とし, H を ϕ から ψ へのホモトピーとする. このとき

$$H' : X \times I \to Y,\ (x,t) \mapsto H(x, 1-t)$$

は ψ から ϕ へのホモトピーを定めることを示せ.

(3) $\phi, \psi, \xi \in \mathcal{C}(X,Y)$ とし, H を ϕ から ψ へのホモトピー, G を ψ から ξ へのホモトピーとする. このとき,

$$K : X \times I \to Y,\ (x,t) \mapsto \begin{cases} H(x, 2t) & \text{if } 0 \leq t \leq 1/2, \\ G(x, 2t-1) & \text{if } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

が ϕ から ξ へのホモトピーを定めることを示せ.

裏につづく

問 7. (対面発表) X, Y, Z を位相空間とする. また $\phi_1, \psi_1 \in \mathcal{C}(X,Y)$, $\phi_2, \psi_2 \in \mathcal{C}(Y,Z)$ とし, 各 $i = 1,2$ について, H_i を ϕ_i から ψ_i へのホモトピーとする. このとき

$$H : X \times I \to Z,\ (x,t) \mapsto H_2(H_1(x,t),t)$$

は $(\phi_2 \circ \phi_1)$ から $(\psi_2 \circ \psi_1)$ へのホモトピーを定めることを示せ.

問 8. X を位相空間とする. また $\{*\}$ を一点空間とする. X の各点 x について, ϕ_x を $\{*\}$ から X への連続写像であって, 像が $\{x\}$ となるものとする (一意に定まることに注意). X の二点 $a, b \in X$ を固定する. このとき, ϕ_a から ϕ_b へのホモトピー全体のなす集合と, a から b への path (i.e. 連続写像 $\gamma : I \to X$ であって, $\gamma(0) = a$ かつ $\gamma(1) = b$ となるもの) 全体の集合と一対一対応することを示せ.

問 9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とする. 連続写像 $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ をそれぞれ

$$\phi(x) = (x, 0) \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$\psi(x) = (x, f(x)) \quad (x \in \mathbb{R})$$

と定める. このとき, ϕ から ψ へのホモトピーを一つ構成せよ.

問 10. (対面発表) $X := S^1 := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, $Y := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とおく.

(1) 各 $r > 0$ について, 連続写像 $\phi_r : X \to Y$ を

$$\phi_r : X \to Y,\ x \mapsto rx$$

として定める. $r_1, r_2 > 0$ を固定する. このとき,

$$H : X \times I \to Y,\ (x,t) \mapsto ((1-t)r_1 + tr_2)x.$$

が ϕ_{r_1} から ϕ_{r_2} へのホモトピーを定めていることを示せ.

(2) 連続写像 $\phi : X \to Y$ を

$$\phi(x) := x \quad (x \in X = S^1)$$

として定め, 連続写像 $\psi : X \to Y$ を

$$\psi(x) := (0, 1) \quad (x \in X = S^1)$$

として定める. このとき, 以下の写像 $H : X \times I \to Y$ は ϕ から ψ へのホモトピーを定めていないことを示せ:

$$H : X \times I \to Y,\ (x,t) = ((x_1, x_2), t) \mapsto ((1-t)x_1, (1-t)x_2 + t).$$

(Hint: Study $H(x,t)$ for $(x,t) = ((0,-1), 1/2)$).

(3) 連続写像 $\phi' : X \to Y$ を

$$\phi'(x) := (x_1 + 2, x_2) \quad (x \in X = S^1)$$

として定め, 連続写像 $\psi' : X \to Y$ を

$$\psi'(x) := (2, 1) \quad (x \in X = S^1)$$

として定める. このとき, 以下の写像 $H' : X \times I \to Y$ は ϕ' から ψ' へのホモトピーを定めていることを示せ:

$$H' : X \times I \to Y,\ (x,t) = ((x_1, x_2), t) \mapsto ((1-t)x_1 + 2, (1-t)x_2 + t).$$