幾何学 B 演習問題 No.10 問 82–問 96
対面発表は問 84, 問 91, 問 92, 問 96.

キーワード: 自由モノイド, 自由群, 群の表示.

問 82. S を集合とする.

(1) (Z, ι) を S の生成する自由モノイドとする. このとき, モノイド準同型 $\Psi : Z \to Z$ が $\Psi \circ \iota = \iota$ を満たすなら, $\Psi = \mathrm{id}_Z$ となることを示せ.

(2)「S の生成する自由モノイドは一意」の定式化を述べ, 証明せよ.

問 83. S を集合とする. $\varepsilon := (\ ) \in S^0$ とし, $\mathrm{FG}(S) := \bigsqcup_{n=0}^{\infty} S^n$ に二項演算

$$\mathrm{FG}(S) \times \mathrm{FG}(S) \to \mathrm{FG}(S),\ (w, w') \mapsto w \cdot w' := (w_1, \ldots, w_n, w'_1, \ldots, w'_m) \quad (w \in S^n,\ w' \in S^m)$$

を定める.

(1) このとき $\mathrm{FM}(S)$ は ε を単位元とするモノイドとなることを示せ.

(2) 写像 $\iota : S \to \mathrm{FM}(S)$ を

$$\iota : S \to \mathrm{FM}(S),\ a \mapsto (a)\ (\in S^1)$$

として定める. このとき, $(\mathrm{FM}(S), \iota)$ は S の生成する自由モノイドであることを示せ.

問 84. (対面発表) S を集合とする.

(1) (Z, η) を S の生成する自由群とする. このとき, 群準同型 $\Psi : Z \to Z$ が $\Psi \circ \eta = \eta$ を満たすなら, $\Psi = \mathrm{id}_Z$ となることを示せ.

(2)「S の生成する自由群は同型を除いて一意」の定式化を述べ, 証明せよ.

問 85. $S := \{a\}$ とし, $\eta : S \to \mathbb{Z},\ a \mapsto 1$ とおく. このとき $(\mathbb{Z}, \eta)$ は S の生成する自由群であることを示せ.

問 86. Ω を集合とする.

(1) $\{E_\lambda\ (\subset \Omega \times \Omega)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を Ω 上の同値関係の族とする. このとき $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \subset \Omega \times \Omega$ は Ω 上の同値関係を定めることを示せ.

(2) Ω 上の二項関係 $B\ (\subset \Omega \times \Omega)$ について, 「B を含む最小の同値関係 E_B」が存在することを示せ. この E_B を B の生成する Ω 上の同値関係という.

(3) Ω 上の二項関係 $B\ (\subset \Omega \times \Omega)$ について, 二項関係 B^t を $B^t := \{(x, y) \in \Omega \times (y, x) \in B\}$ により定め, $B' := B \cup B^t$ とおく. このとき, $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ:

  i. $(x, y) \in E_B$.

  ii. ある $n \in \mathbb{Z}$ およびある列 $x_0, \ldots, x_n \in \Omega$ with $x_0 = x,\ x_n = y$ が存在して, 任意の $k = 1, \ldots, n$ について $(x_{k-1}, x_k) \in B'$ となる.

(4) Ω' を集合とし, B を Ω 上の二項関係とする. 写像 $f : \Omega \to \Omega'$ が以下の条件を満たすとする:

条件: 任意の $(x, y) \in B$ について, $f(x) = f(y)$.

このとき

$$\overline{f} : \Omega / E_B \to \Omega',\ [x] \mapsto f(x)$$

が写像として well-defined であることを示せ. ただし, 各 $x \in \Omega$ について, $[x] \in \Omega / E_B$ を x の E_B による同値類とする.

裏へ続く

問 87. S を集合とする．$\overline{S} := \{\overline{a} \mid a \in S\}$ とおき, $\widetilde{\mathrm{FG}}(S) := \mathrm{FM}(S \sqcup \overline{S})$ とおく．ただし $(\mathrm{FM}(S \sqcup \overline{S}), \iota)$ は S の生成する自由モノイドとする．$\widetilde{\mathrm{FG}}(S)$ 上の二項関係 $\succ$ を以下で定める:

- $w \succ w' \overset{def}{\Longleftrightarrow} w = \alpha \cdot \iota(x) \cdot \iota(\overline{x}) \cdot \beta$ and $w' = \alpha \cdot \beta$ for some $x \in S$, $\alpha, \beta \in \widetilde{\mathrm{FG}}(S) := \mathrm{FM}(S \sqcup \overline{S})$.

また $\succ$ の生成する $\widetilde{\mathrm{FG}}(S)$ 上の同値関係を $\sim$ と表し, $\widetilde{\mathrm{FG}}(S)$ の $\sim$ による商集合を $\mathrm{FG}(S)$ とおく．また各 $w = \iota(w_1) \cdots \iota(w_n) \in \widetilde{\mathrm{FG}}(S)$ $(w_1, \ldots, w_n \in S)$ について, 対応する $\mathrm{FG}(S)$ の元を $[w]$ または $[w_1 \cdots w_n]$ と書く．

(1) $\mathrm{FG}(S)$ 上の二項演算

$$\mathrm{FG}(S) \times \mathrm{FG}(S) \to \mathrm{FG}(S),\ ([w], [w']) \mapsto [w \cdot w']$$

は well-defined であること, および $\mathrm{FG}(S)$ に ε $(:= [\varepsilon])$ を単位元とする群構造を定めることを示せ．

(2) $\eta : S \to \mathrm{FG}(S),\ a \mapsto [\iota(a)]$ と定める．このとき $(\mathrm{FG}(S), \eta)$ は S の生成する自由群であることを示せ．

問 88. G を群とし, S を G の部分集合とする．また包含写像を $\iota_G : S \to G$ と書く．集合 S の生成する自由群を $(\mathrm{FG}(S), \eta)$ とし, $\tilde{\iota_G} : \mathrm{FG}(S) \to G$ を $\tilde{\iota_G} \circ \eta = \iota_G$ となる群準同型とする．このとき S についての以下の二条件が同値であることを示せ:

(1) S は群 G の生成系である．つまり G の部分群であって, S を含むものは G に限る．

(2) 群準同型 $\tilde{\iota_G} : \mathrm{FG}(S) \to G$ は全射．

問 89. (1) 群 Γ を

$$\Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \;\middle|\; n, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

として定める (積は行列の積とする)．また $A, B \in \Gamma$ を

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく．このとき $S_0 := \{A, B\}$ は Γ の生成系であることを示せ．また Γ が非可換無限群であることを示せ．

(2) S を集合であって, $\#S \geq 2$ であるとする．このとき S の生成する自由群は非可換無限群であることを示せ．

問 90. G を群とする．

(1) $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を G の正規部分群の族とする．このとき, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ は G の正規部分群であることを示せ．

(2) R を G の部分集合とする．このとき「R を含む最小の G の正規部分群 $\hat{R}_G$」が存在することを示せ．この $\hat{R}_G$ を R の G における正規閉包という．

(3) G' を群とし, $f : G \to G'$ を群準同型とする．また f が以下の条件を満たすとする:

条件:　$R \subset \ker f$.

このとき,

$$\overline{f} : G/\hat{R}_G \to G',\ [g] \mapsto f(g)$$

は写像として well-defined であり, 群準同型を定めることを示せ．ただし各 $g \in G$ について, $[g] := g\hat{R}_G \in G/\hat{R}_G$ とおく．

2 枚目に続く

問 91. (対面発表) S を集合とし, $(\mathrm{FG}(S), \eta)$ を S の生成する自由群とする. また, R を $\mathrm{FG}(S)$ の部分集合とし, $\hat{R}$ を R の $\mathrm{FG}(S)$ における正規閉包とする. ここで群 $\langle\ S \mid R\ \rangle$ を

$$\langle\ S \mid R\ \rangle := \mathrm{FG}(S)/\hat{R}$$

として定め, 商写像を $\pi : \mathrm{FG}(S) \to \langle\ S \mid R\ \rangle$ とする. また G' を群とする. このとき, 対応 $h \mapsto h \circ \pi \circ \eta$ が, 以下の二つの集合の間に一対一対応を与えることを示せ.

- $\mathrm{Hom}(\langle\ S \mid R\ \rangle, G')$ (群 $\langle\ S \mid R\ \rangle$ から G' への群準同型全体の集合).
- 写像 $f : S \to G'$ であって, 以下の条件を満たすもの全体のなす集合 $\mathrm{Map}_R(S, G')$:
  条件: $R \subset \mathrm{Ker}\,\tilde{f}$. ただし $\tilde{f} : \mathrm{FG}(S) \to G'$ を f の誘導する群準同型 (i.e. $\tilde{f} \circ \eta = f$) とする.

問 92. (対面発表) $S = \{a, b\}$ $(a \neq b)$ とし, $R := \{[abab]\} \subset \mathrm{FG}(S)$ とおく.

(1) 自由群 $\mathrm{FG}(S)$ において,

$$[ab] = [ab\overline{a}\overline{b}] \cdot [ba]$$

が成り立つことを示せ.

(2) 群 $\langle\ S \mid R\ \rangle = \langle\ a, b \mid ab\overline{a}\overline{b}\ \rangle$ は可換群 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ と同型であることを示せ.

問 93. $S = \{a\}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $a^n := [\overbrace{a \dots a}^{n\ \text{個}}] \in \mathrm{FG}(S)$ とおく. このとき群 $\langle\ a \mid a^n \rangle$ は有限巡回群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と同型であることを示せ.

問 94. (優先度: 低) $S = \{a, b\}$ $(a \neq b)$ とし, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ とする. このとき群 $\langle\ a, b \mid a^n, b^2, \overline{a}ba^{n-1}b\ \rangle$ は位数 $2n$ の非可換有限群となることを示せ (二面体群).

問 95. (優先度: 低) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とし, $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ ($s_1, \dots, s_n$ は互いに異なる) とする. また

$$R := \{[s_i^2] \mid i = 1, \dots, n\} \cup \{s_i s_{i+1} s_i \overline{s_{i+1} s_i s_{i+1}} \mid i = 1, \dots, n-1\} \cup \{s_i s_j \overline{s_i s_j} \mid |i - j| \geq 2\}$$

とおく. このとき群 $\langle\ S \mid R\ \rangle$ は $(n+1)$ 次対称群 $\mathfrak{S}_{n+1}$ と同型であることを示せ.

問 96. (対面発表) G を群とし, S を G の生成系とする. また, $\widetilde{\iota_G} : \mathrm{FG}(S) \to G$ を ι_G の誘導する群準同型とする. また R を $\ker \widetilde{\iota_G}$ の部分集合であって, R の $\mathrm{FG}(S)$ における正規閉包が $\ker \widetilde{\iota_G}$ と一致するものとする.

(1) このとき, G は $\langle\ S \mid R\ \rangle$ と同型であることを示せ.

(2) H を群とする. このとき対応 $h \mapsto h \circ \widetilde{\iota_G}$ は $\mathrm{Hom}(G, H)$ (G から H への群準同型全体のなす集合) から集合

$$\{f : \mathrm{FG}(S) \to H \mid f\ \text{は群準同型}, R \subset \mathrm{Ker}\, h\}$$

への全単射を定めることを示せ.