幾何学 B 演習問題 No.11 問 97–問 108

対面発表は問 97, 問 101, 問 103, 問 107, 問 108.

キーワード: 自由積, 融合積

問 97. (対面発表) $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}$ (無限巡回群) とする．また

$$j_1 : G_1 = \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ n \mapsto (n, 0),$$
$$j_2 : G_2 = \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ n \mapsto (0, n)$$

とおく．このとき $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, j_1, j_2)$ は $G_1 = \mathbb{Z}$, $G_2 = \mathbb{Z}$ の自由積であるだろうか？ (Hint: $Z' := \mathfrak{S}_3$ (三次対称群) とし,

$$j_1' : G_1 := \mathbb{Z} \to \mathfrak{S}_3,\ n \mapsto (\sigma_{(1,2)})^n,$$
$$j_2' : G_2 := \mathbb{Z} \to \mathfrak{S}_3,\ n \mapsto (\sigma_{(2,3)})^n$$

とおいて考えよ．ただし $\sigma_{(1,2)}, \sigma_{(2,3)} \in \mathfrak{S}_3$ はそれぞれ $1, 2$ および $2, 3$ の互換とする).

問 98. G_1, G_2 を群とする．

(1) (Z, j_1, j_2) を G_1, G_2 の自由積とする．このとき, 群準同型 $\Psi : Z \to Z$ が $Z \circ j_k = j_k$ (for $k = 1, 2$) を満たすなら, $\Psi = \mathrm{id}_Z$ となることを示せ．

(2)「G_1, G_2 の自由積は同型を除いて一意」の定式化を述べ, 証明せよ．

問 99. S, A を集合とし, $(\mathrm{FG}(S), \iota_S)$, $(\mathrm{FG}(A), \iota_A)$ をそれぞれ S, A の生成する自由群とする．

(1) 各写像 $f : S \to A$ について, 群準同型 $\tilde{f} : \mathrm{FG}(S) \to \mathrm{FG}(A)$ であって, $\tilde{f} \circ \iota_S = \iota_A \circ f$ となるものがただ一つ存在することを示せ．

(2) $f : S \to A$ を単射写像とする．また $g : A_f := f(S) \to S$ を $A_f := f(S)$ 上での f の逆写像とし, 写像 $\phi : A \to \mathrm{FG}(S)$ を各 $a \in A$ について,

$$\phi(a) := \begin{cases} \iota_S(g(a)) & (a \in A_f) \\ \varepsilon & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

として定める． この ϕ が誘導する群準同型を $\tilde{\phi} : \mathrm{FG}(A) \to \mathrm{FG}(S)$ とすする． このとき, $\tilde{\phi} \circ \tilde{f} = \mathrm{id}_{\mathrm{FG}(S)}$ となることを示せ．

(3) $f : S \to A$ を単射写像とする．このとき $\tilde{f} : \mathrm{FG}(S) \to \mathrm{FG}(A)$ は単射であることを示せ．

問 100. 群 G_1, G_2 について, その表示をそれぞれ $\langle\ S_1 \mid R_1\ \rangle$, $\langle\ S_2 \mid R_2\ \rangle$ として固定しておく．また各 $k = 1, 2$ について, S_k から $S_1 \sqcup S_2$ への包含写像が誘導する単射群準同型 $\mathrm{FG}(S_k) \hookrightarrow \mathrm{FG}(S_1 \sqcup S_2)$ を考え (上の問を参照), それにより $\mathrm{FG}(S_k)$ を $\mathrm{FG}(S_1 \sqcup S_2)$ の部分群とみなす．特に R_1, R_2 をそれぞれ $\mathrm{FG}(S_1 \sqcup S_2)$ の部分集合とみなす．ここで群 $G_1 * G_2$ を

$$G_1 * G_2 := \langle\ S_1 \sqcup S_2 \mid R_1 \cup R_2\ \rangle$$

として定める．また, 自由群 $\mathrm{FG}(S_1)$, $\mathrm{FG}(S_2)$, $\mathrm{FG}(S_1 \sqcup S_2)$ から G_1, G_2, $G_1 * G_2$ への自然な全射群準同型をそれぞれ π_1, π_2, π とおく．

(1) 各 $k = 1, 2$ について, 群準同型 $j_k : G_k \to G_1 * G_2$ であって, $j_k \circ \pi_k = \pi|_{\mathrm{FG}(S_k)}$ を満たすものがただ一つ存在することを示せ．

(2) $(G_1 * G_2, j_1, j_2)$ が G_1, G_2 の自由積となることを示せ．

裏へ

問 101. (対面発表) $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $G_1 := \langle\ a \mid a^n\ \rangle$, $G_2 := \langle\ b \mid b^m\ \rangle$ とする．このとき G_1 と G_2 の自由積を構成せよ.

問 102. (優先度: 低)

(1) 各 $n \in \mathbb{Z}$ について, 全単射 $r_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ および $l_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を

$$r_n(x) := -x + 2n,\ l_n(x) := x + n \quad (x \in \mathbb{Z})$$

として定める．このとき $\Gamma := \{r_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{l_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ は非可換無限群 (積は合成) を定めることを示せ．また $A := r_0$, $B := l_1$ とおくと, $S := \{A, B\}$ は Γ の生成系となることを示せ.

(2) $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (位数 2 の有限可換群) とする．このとき自由積 $G_1 * G_2$ から群 Γ への全射群準同型を構成せよ．また $G_1 * G_2$ は非可換無限群となることを示せ.

以下, “設定 $(\star)$” を, 「G_1, G_2, H を群とし, $i_k : H \to G_k$ $(k = 1, 2)$ を群準同型とする」こととする.

問 103. (対面発表) 設定 $(\star)$ において, 「(G_1, G_2, H, i_1, i_2) の融合積は同型を除いて一意である」の定式化を述べ, 証明せよ.

問 104. G, H を群とし, $i : H \to G$ を群準同型とする．また G を $\langle\ S \mid R\ \rangle$ と表示しておき, π_G を自由群 $\mathrm{FG}(S)$ から G への自然な群準同型としておく．さらに A を H の生成系とする．このとき, 写像 $\hat{i} : A \to \mathrm{FG}(S)$ であって, $\pi_G \circ \hat{i} = i|_A$ となるものが存在することを示せ (Hint: $\hat{i}$ は一意ではない．選択公理, つまり「任意の全射写像について, その切断が存在する」は用いてよい).

問 105. 設定 $(\star)$ において, G_k を $\langle\ S_k \mid R_k\ \rangle$ と表示しておき, また π_k を自由群 $\mathrm{FG}(S_k)$ から G_k への自然な全射群準同型とする $(k = 1, 2)$. さらに A を H の生成系とし, 写像 $\hat{i}_k : A \to \mathrm{FG}(S_k)$ を $\pi_k \circ \hat{i}_k = i|_A$ となるものとする．$\mathrm{FG}(S_k)$ を $\mathrm{FG}(S_1 \sqcup S_2)$ の部分群とみなし,

$$R_H := \{(\hat{i}_1(a)) \cdot (\hat{i}_2(a))^{-1} \mid a \in A\} \subset \mathrm{FG}(S_1 \sqcup S_2)$$

とおく．このとき,

$$G_1 *_H G_2 := \langle\ S_1 \sqcup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_H \rangle$$

は (G_1, G_2, H, i_1, i_2) の融合積となることを示せ.

問 106. 空集合の生成する自由群が自明群であることを示せ.

問 107. (対面発表) $G_1 = \langle\ a, b\ \rangle$, $G_2 = \langle\ \emptyset\ \rangle$, $H = \langle\ c\ \rangle$ とする．また群準同型 $i_1 : H \to G_1$, $i_2 : H \to G_2$ を, $i_1(c) = ab\overline{a}\overline{b}$, $i_2(c) = \varepsilon$ となるものとする．このとき融合積 $G_1 *_H G_2$ を求めよ.

問 108. (対面発表) $G_1 = \langle\ a_1, b_1\ \rangle$, $G_2 = \langle\ a_2, b_2\ \rangle$, $H = \langle\ c\ \rangle$ とする．また群準同型 $i_1 : H \to G_1$, $i_2 : H \to G_2$ を, $i_1(c) = a_1 b_1 \overline{a_1}\overline{b_1}$, $i_2(c) = a_2 b_2 \overline{a_2}\overline{b_2}$ となるものとする．このとき融合積 $G_1 *_H G_2$ を求めよ.