幾何学 B 演習問題 No.12 問 109–問 109

対面発表は問 109 (2), (6).

キーワード: Van Kampen の定理の証明

問 109. (X, a) を基点付き空間 (位相空間とその点の組) とする. U_1, U_2 を X の開集合とし, $X = U_1 \cup U_2$ であり, さらに $V := U_1 \cap U_2$ としたとき, V は弧状連結であり, $a \in V$ であるとする. 各 $k = 1, 2$ について, V から U_k への包含写像を i^k, U_k から X への包含写像を j^k とする. また i^k, j^k が誘導する群準同型 $i^k_* : \pi_1(V, a) \to \pi_1(U_k, a)$, $j^k_* : \pi_1(U_k, a) \to \pi_1(X, a)$ を考える.

(1) $j^1_* \circ i^1_* = j^2_* \circ i^2_*$ as $\pi_1(V, a) \to \pi_1(X, a)$ を示せ.

(2) (対面発表) 各 $\gamma \in \mathrm{Loop}(X, a)$ について, 有限の長さの狭義単調増加数列 $D := (d_0, \ldots, d_n)$ $(n \geq 1)$ であって $d_0 = 0$, $d_n = 1$ であるもの (つまり $I = [0, 1]$ の分割を表す数列) が "(γ, U_1, U_2)-decomposition of $I := [0, 1]$" であることを, 以下の Condition $(\star)$ を満たすものとして定める:

Condition $(\star)$: For any $q = 1, \ldots, n$, the point $\gamma(d_q)$ is in $V := U_1 \cap U_2$ and the subset $\gamma([d_{q-1}, d_q])$ of X is contained in U_{ε_q} for some $q = 1, 2$.

また (γ, U_1, U_2)-decomposition D 全体の集合を Dec^γ_V とおく. $\gamma \in \mathrm{Loop}(X, a)$ を固定したとき, Dec^γ_V が空集合でないことを示せ (Hint: ルベーグ数: 演習問題 問 57 (No.09)).

(3) $\gamma \in \mathrm{Loop}(X, a)$ および $D = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathrm{Dec}^\gamma_V$ を固定する. 各 $q = 0, \ldots, n$ について $a^{\gamma, D}_q := \gamma(d_q) \in V$ とおく. また集合

$$\mathcal{L}^\gamma_D \subset \mathrm{Path}(V, a, a^{\gamma,D}_q a^D_0) \times \mathrm{Path}(V, a, a^D_1) \times \cdots \times \mathrm{Path}(V, a, a^D_1)$$

を, 各 $L := (\ell^0_a, \ell^1_a, \ldots, \ell^n_a) \in \mathrm{Path}(V, a, a^D_0) \times \mathrm{Path}(V, a, a^D_1) \times \cdots \times \mathrm{Path}(V, a, a^D_1)$ に対して,

$$L := (\ell^0_a, \ell^1_a, \ldots, \ell^n_a) \in \mathcal{L}^\gamma_D \iff \ell^0_a = \ell^n_a = \ell^a_{\mathrm{id}}$$

となるように定める. このとき $\mathcal{L}^\gamma_D$ は空集合ではないことを示せ.

(4) $\gamma \in \mathrm{Loop}(X, a)$, $D = (d_0, \ldots, d_n) \in \mathrm{Dec}^\gamma_V$ および $L = (\ell^0_a, \ell^1_a, \ldots, \ell^n_a) \in \mathcal{L}^\gamma_D$ を固定する. ここで各 $q = 1, \ldots, n$ において, $\gamma^D_q \in \mathrm{Path}(X, a^D_{q-1}, a^D_q)$ を

$$\gamma^D_q : I \to X, \ s \mapsto \gamma(sd_q + (1 - s)d_{q-1})$$

により定める. また, $\gamma^L_q \in \mathrm{Loop}(X, a)$ を

$$\gamma^L_q := \overline{\ell^q_a} * \gamma^D_q * \ell^{q-1}_a \in \mathrm{Loop}(X, a)$$

として定める. ここで

$$\mathcal{E}^\gamma_L := \{E := (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{1, 2\}^n \mid \gamma^L_q(I) \subset U_{\varepsilon_q}\}$$

とおく. このとき, $\mathcal{E}^\gamma_L$ は空集合ではないことを示せ. また各 $E = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathcal{E}^\gamma_L$ に対して,

$$[\gamma]_b = (j^{\varepsilon_n}_*([\gamma^L_n]_b)) * \cdots * (j^{\varepsilon_1}_*([\gamma^L_1]_b)) \text{ as in } \pi_1(X, a)$$

となることを示せ. ただし, 各 q について $[\gamma^L_q]_b \in \pi_1(U_{\varepsilon_q}, a)$ とみなしている.

裏へ

(5) $\pi_1(X,a)$ において部分集合

$$j_*^1(\pi_1(U_1,a)) \cup j_*^2(\pi_1(U_2,a))$$

は生成系であることを示せ.

(6) (対面発表) Z' を群, 各 $k=1,2$ について $j'_k : \pi_1(U_k,a) \to Z'$ を群準同型とする. このとき群準同型 $\Phi : \pi_1(X,a) \to Z'$ であって, $\Phi \circ j_*^k = j'_k$ $(k=1,2)$ を満たすものは高々一意であることを示せ (Hint: 上の問 (5) の結果を用いてよい).

(7) $\delta \in \mathcal{C}(I,V)$ を任意に固定する. このとき δ から γ_{id}^a へのホモトピー $P : I \times I \to V$ が存在することを示せ. また各 $t \in I$ について, $P^0, P^1 \in \mathcal{C}(I,V)$ を $P^0(s) := P(0,s)$, $P^1(s) := P(1,s)$ $(s \in I)$ として定めたとき, $P^0, P^1 \in \mathrm{Path}(V,V,a)$ であり, $P_0 \sim_{h.b.} P_1$ in $\mathrm{Path}(V,V,a)$ となることを示せ.

(8) $\ell, \ell' \in \mathrm{Loop}(X,a)$ が $\ell \approx \ell'$ であることを, ℓ から ℓ' への境界条件を満たすホモトピー $H : I \times I \to X$ が存在して,

$$\bigcap_{t \in I} \mathrm{Dec}_V^{H_t} \neq \emptyset$$

となることと定める. ただし各 $t \in I$ について $H_t \in \mathrm{Loop}(X,a)$ を $H_t(s) = H(s,t)$ $(s \in I)$ により定めた.[*1]

以下, $\ell \approx \ell'$ とする. このとき, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\{\varepsilon_q \in \{1,2\}\}_{q=1,\ldots,n}$ および $\{\alpha_q \in \pi_1(U_{\varepsilon_q},a)\}_{q=1,\ldots,n}$ であって,

$$[\ell]_b = [\ell']_b = j_*^{\varepsilon_n}(\alpha_n) \cdot \cdots \cdot j^{\varepsilon_1}(\alpha_1) \text{ in } \pi_1(X,a)$$

となるものが存在することを示せ.

(9) $\gamma, \gamma' \in \mathrm{Loop}(X,a)$ であって, $[\gamma]_b = [\gamma']_b$ となるものを考える. このとき, $\mathrm{Loop}(X,a)$ の列 $\gamma = \gamma^0, \gamma^1, \ldots, \gamma^m = \gamma'$ であって, 各 $q = 1,\ldots,m$ について, $\gamma^{q-1} \approx \gamma^q$ となるものが存在することを示せ (Hint: (2) と似たアイデアで考える).

(10) $\gamma \in \mathrm{Loop}(X,a)$ とする. $D = (d_1,\ldots,d_n)$, $D' = (d'_1,\ldots,d'_m) \in \mathrm{Dec}_V^\gamma$ について, $D \prec D'$ であるとは, D' が D の部分列であることと定める (狭義単調性から $\{d'_1,\ldots,d'_m\} \subset \{d_1,\ldots,d_n\}$ と同値). このとき, 任意の $D^1, D^2 \in \mathrm{Dec}_V^\gamma$ について, ある $D^0 \in \mathrm{Dec}_V^\gamma$ であって, $D^0 \prec D^1$ かつ $D^0 \prec D^2$ を満たすものが存在することを示せ.

(11) Z' を群, 各 $k=1,2$ について $j'_k : \pi_1(U_k,a) \to Z'$ を群準同型とし, $j'_1 \circ i_*^1 = j'_2 \circ i_*^2$ as $\pi_1(V,a) \to Z'$ が成り立っているとする. 各 $\gamma \in \mathrm{Loop}(X,a)$, $D = (d_0,\ldots,d_n) \in \mathrm{Dec}_V^\gamma$, $L = (\ell_a^0,\ldots,\ell_a^n) \in \mathcal{L}_D^\gamma$ および $E = (\varepsilon_1,\ldots\varepsilon_n) \in \mathcal{E}_L^\gamma$ について,

$$\tilde{\Phi}(\gamma,D,L,E) := (j'_{\varepsilon_n}([\gamma_n^L]_b)) \cdots (j'_{\varepsilon_1}([\gamma_1^L]_b)) \in Z'$$

とおく. ただし各 q について, $[\gamma_q^L]_b \in \pi_1(U_{\varepsilon_q},a)$ とみなしている.

i. $\tilde{\Phi}(\gamma,D,L,E) \in Z'$ は E の選び方に依らないことを示せ. 以下, $\tilde{\Phi}(\gamma,D,L) := \tilde{\Phi}(\gamma,D,L,E)$ for some $E \in \mathcal{E}_L^\gamma$ とおく.

ii. $\tilde{\Phi}(\gamma,D,L) \in Z'$ は L の選び方に依らないことを示せ. 以下, $\tilde{\Phi}(\gamma,D) := \tilde{\Phi}(\gamma,D,L)$ for some $L \in \mathcal{L}_D^\gamma$ とおく.

2 枚目へ

[*1] 注意: この "$\approx$" は $\mathrm{Loop}(X,a)$ の同値関係を定めるわけではない. 反射律と対称律は満たすが, 推移律は満たさない.

iii. $\tilde{\Phi}(\gamma, D) \in Z'$ は D の選び方に依らないことを示せ (Hint: 上の問 (7) の結果を用いてよい). 以下 $\tilde{\Phi}(\gamma) := \tilde{\Phi}(\gamma, D)$ for some $D \in \mathrm{Dec}_V^{\gamma}$ とおく.

iv. 写像

$$\tilde{\Phi} : \mathrm{Loop}(X, a) \to Z',\ \gamma \mapsto \tilde{\Phi}(\gamma)$$

は積を保つことを示せ. また各 $\gamma \in \mathrm{Loop}(V, a)$ について, $\tilde{\Phi}([\gamma]_b) = j'_k([\gamma]_b)$ となることを示せ.

v. 写像

$$\Phi : \pi_1(X, a) \to Z',\ [\gamma]_b \mapsto \tilde{\Phi}(\gamma)$$

は well-defined であることを示せ. また Φ が群準同型であり, $\Phi \circ j_*^k = j_k$ as $\pi_1(U_k, a) \to Z'$ $(k = 1, 2)$ となることを示せ.

(12) (Van Kampen の定理) $(\pi_1(X, a), j_*^1, j_*^2)$ は $(\pi_1(U_1, a), \pi_1(U_2, a), \pi_1(V, a), i_*^1, i_*^2)$ の融合積であることを示せ.