幾何学 B 演習問題 No.13 問 110–問 124

対面発表は問 110, 問 113, 問 116, 問 117, 問 118.

キーワード: Van Kampen の定理の応用, 局所切断, ファイバー束, 被覆写像, 被覆準同型.

問 110. (対面発表) $n \geq 2$ とする. n 次元球面 S^n が単連結であることを示せ.

問 111. $(S^1, *) \vee (S^1, *) = (S^1 \vee S^1, *)$ の基本群の表示を求めよ. また $(\Sigma_2, *)$ の基本群の表示を求めよ.

問 112. 以下, Σ_g を種数 g の閉曲面 (g 人乗り浮き輪) とする. また Σ_g の基点 $*$ を固定しておく.

(1) $a \in \Sigma_2$ with $a \neq *$ を固定する. $(\Sigma_2 \setminus \{a\}, *)$ の基本群の表示を求めよ.

(2) $(\Sigma_3, *)$ の基本群の表示を求めよ.

問 113. (対面発表)

(1) 射影平面およびクラインの壺の展開図を描け.

(2) 基点付き射影平面の基本群の表示を求めよ. また基点付きクラインの壺の基本群の表示を求めよ.

問 114. E, X, F を位相空間とし, $\pi : E \to X$ を F-ファイバー束とする.

(1) π は全射開写像であることを示せ.

(2) $x \in X$ とする. このとき「π は x のまわりで局所切断を持つ」を定式化し, 証明せよ.

問 115. $k = 1, 2$ について, $\pi_k : E_k \to X_k$ を F_k-ファイバー束とする (E_k, X_k, F_k は位相空間). このとき

$$\pi_1 \times \pi_2 : E_1 \times E_2 \to X_1 \times X_2,\ (e_1, e_2) \mapsto (\pi_1(e_1), \pi_2(e_2))$$

は $(F_1 \times F_2)$-ファイバー束であることを示せ.

問 116. (対面発表) 「被覆準同型は合成で閉じる」, 「恒等写像は被覆準同型となる」, 「被覆同型の逆写像も被覆同型である」, 「被覆変換群は群をなす」をそれぞれ定式化し, 証明せよ.

問 117. (対面発表) 「被覆準同型は各ファイバーを保つ」を定式化し, 証明せよ. また 「被覆同型は各ファイバーにおいて同相」を定式化し, 証明せよ.

問 118. (対面発表) $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とし, $\pi : \mathbb{R} \to S^1,\ \theta \mapsto \exp(2\pi i \theta)$ とする.

(1) $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ が $\mathbb{Z}$-被覆写像であることを示せ. ただし $V_+ := S^1 \setminus \{-1\}$, $V_- := S^1 \setminus \{1\}$ としたとき, $\pi|_{(-1/2,1/2)} : (-1/2, 1/2) \to V_+$ および $\pi|_{(0,1)} : (0, 1) \to V_-$ が同相であるという事実は用いてよい.

(2) $k \in \mathbb{Z}$ とし,

$$L_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \theta \mapsto \theta + k$$

とする. このとき L_k は π から π への被覆同型であることを示せ.

問 119. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $\pi_n : S^1 \to S^1,\ z \mapsto z^n$ とおく.

(1) π_n が $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-被覆写像であることを示せ.

(2) $f_n : \mathbb{R} \to S^1,\ \theta \mapsto \exp(2\pi i \frac{1}{n}\theta)$ が π から π_n への被覆準同型であることを示せ. ただし π は上の問題で定義された $\mathbb{Z}$-被覆写像 on S^1 とする.

問 120. $T^2 = S^1 \times S^1$ とおく.

(1) $\varpi : \mathbb{R}^2 \to T^2,\ (\theta_1, \theta_2) \mapsto (\exp(2\pi i \theta_1), \exp(2\pi i \theta_2))$ は $\mathbb{Z}^2$-被覆写像であることを示せ.

(2) $\varpi' : \mathbb{R} \times S^1 \to T^2,\ (\theta_1, z_2) \mapsto (\exp(2\pi i \theta_1), z_2)$ は $\mathbb{Z}$-被覆写像であることを示せ.

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times S^1,\ (\theta_1, \theta_2) \to (\theta_1, \exp(2\pi i \theta_2))$ は ϖ から ϖ' への被覆準同型であることを示せ.

裏へ

問 121. (優先度: 低) 指数関数

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z \mapsto \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

が $\mathbb{Z}$-被覆写像であることを示せ.

問 122. (優先度: 低) $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $D^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ とする.

(1) $S^1 \times D^2$ を表す絵を描け (solid torus).

(2) $S^1 \times D^2$ の部分位相空間

$$E := \{(z, tw) \in S^1 \times D^2 \mid z, w \in S^1, w^2 = z, t \in [0,1]\}$$

を表す絵を描け (Möbius の帯)

(3) $\pi : E \to S^1,\ (z, tw) \mapsto z$ は $[-1,1]$-ファイバー束であることを示せ.

問 123. (優先度: 低) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} := \{x \in M(n, \mathbb{C}) \mid x^* = x, \operatorname{trace} x = 1, \operatorname{rank} x = 1\}$ とおく. ただし x^* は x の転置共役を表すものとする. $M(n, \mathbb{C})$ を $\mathbb{C}^{n^2}$ と同一視することにより, $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ を位相空間とみなす.

(1) $\Omega_n :=$ { one dimensional complex linear subspaces in $\mathbb{C}^n$} とおく.

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \to \Omega_n,\ x \mapsto \mathrm{Image}\ x$$

は全単射となることを示せ.

(2) 直積空間 $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \times \mathbb{C}^n$ を考え, 部分位相空間

$$E_n := \{(x, v) \in \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \times \mathbb{C}^n \mid v \in \mathrm{Image}\ x\}$$

を考える. このとき $\pi_n : E_n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1},\ (x, v) \mapsto x$ は $\mathbb{C}^n$-ファイバー束であることを示せ ($\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ 上の canonical line bundle).

(3) $n = 2$ の場合を考える. $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ が S^2 と同相であることを示せ. また

$$S(\mathbb{C}^2) := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

とおく. $S(\mathbb{C}^2)$ が S^3 と同相であることを示せ. さらに

$$\varpi : S(\mathbb{C}^2) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1,\ v := (z_1, z_2) \mapsto x_v$$

とおく. ただし, 各 $v \in S(\mathbb{C}^2)$ について, $x_v \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ は $v \in \mathrm{Image}\ x_v$ となるただ一つの元とする. このとき, $\varpi : S(\mathbb{C}^2) \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ は S^1-ファイバー束となることを示せ (S^3 の Hopf fibration).

2 枚目へ

問 124. (優先度: 低) $M=(M,\mathcal{A})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とする ($\mathcal{A}$ は M 上の n 次元極大 atlas). また各 $p\in M$ について, T_pM を p における M の接空間とする. ここで

$$TM := \bigsqcup_{p\in M} T_pM := \{(p,v) \mid p\in M, v\in T_pM\}$$

とおく.

(1) TM 上の位相 $\mathcal{O}$ であって, 以下の条件を満たすものが一意に存在することを示せ.

条件: 各 $(O,U,\boldsymbol{u})\in\mathcal{A}$ について, $TO := \{(p,v)\in TM \mid p\in O\}\subset TM$ とおいて $(TM,\mathcal{O})$ の部分位相空間とみなしたとき,

$$O\times\mathbb{R}^n \to TO,\ (p,(a_1,\ldots,a_n)) \mapsto (p, \sum_{i=1}^n a_i(\partial/\partial\boldsymbol{u}_i)_p)$$

が同相写像となる.

(2) 位相空間 $TM=(TM,\mathcal{O})$ を考える. このとき

$$\pi : TM \to M,\ (p,v)\mapsto p$$

は $\mathbb{R}^n$-ファイバー束であることを示せ (多様体上の接束).