幾何学 B 演習問題 No.14 問 125–問 135

対面発表は問 125, 問 132, 問 135.

キーワード: ファイバー束, 被覆写像の path lift

問 125. (対面発表) $\pi : E \to X$ を F-ファイバー束とする. また $a, b \in X$ とし, $\tilde{a} \in E_a$ $(:= \pi^{-1}(\{a\}))$ を固定する. さらに $\gamma \in \mathrm{Path}(X, a, b)$ も固定する.

(1) ある有限長の狭義単調増加数列 $t_0, \ldots, t_n$ および $\{(U_q, \eta_q) \in \mathcal{LT}_F(\pi)\}_{q=1,\ldots,n}$ であって, $t_0 = 0$ かつ $t_n = 1$ かつ $\gamma(I_q) \subset U_q$ $(q = 1, \ldots, n)$ となるものが存在することを示せ. ただし $I_q := [t_{q-1}, t_q] \subset I$ とおいた.

(2) ある $\tilde{\gamma} \in \mathrm{Path}(E, \tilde{a}, E_b)$ であって, $\tilde{\gamma}_\pi$ $(:= \pi \circ \tilde{\gamma})$ $= \gamma$ となるものが存在することを示せ.

問 126. (優先度: 低) $\pi : E \to X$ を F-ファイバー束とする. $H \in \mathcal{C}(I \times I, X)$, $\tilde{\gamma}_0 \in \mathcal{C}(I, E)$ とし, $H \circ \iota_0 = \pi \circ \tilde{\gamma}_0$ を満たすとする. ただし $\iota_0 : I \to I \times I,\ s \mapsto (s, 0)$ とおいた. このとき $\tilde{H} \in \mathcal{C}(I \times I, E)$ であって, $\pi \circ \tilde{H} = H$ かつ $\tilde{H} \circ \iota_0 = \tilde{\gamma}_0$ を満たすものが存在することを示せ.

問 127. $\pi : E \to X$ を F-ファイバー束とする. また $a, b \in X$ とし, $\tilde{a} \in E_a$ を固定する. さらに $\gamma, \gamma' \in \mathrm{Path}(X, a, b)$ with $[\gamma]_b = [\gamma']_b$ および $\tilde{\gamma} \in \mathrm{Path}(E, \tilde{a}, E_b)$ with $\tilde{\gamma}_\pi = \gamma$ を固定する. このとき $\tilde{\gamma'} \in \mathrm{Path}(E, \tilde{a}, E_b)$ であって, $\tilde{\gamma'}_\pi = \gamma'$ かつ $[\tilde{\gamma}]_b = [\tilde{\gamma'}]_b$ (i.e. $\tilde{\gamma}$ から $\tilde{\gamma'}$ へのホモトピー $\tilde{H} \in \mathcal{C}(I \times I, E)$ であって, 境界条件 $\tilde{H}(\{0\} \times I) \subset \{\tilde{a}\}$ および $\tilde{H}(\{1\} \times I) \subset E_b$ を満たすものが存在する) を満たすものが存在することを示せ.

問 128.「多様体は局所弧状連結」を定式化し, 証明せよ.

問 129. $X := (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ は弧状連結であるが, 局所弧状連結とはならないことを示せ.

問 130. X を局所弧状連結な位相空間とする.

(1) X の開集合は局所弧状連結であることを示せ.

(2) X の各弧状連結成分は開集合であることを示せ.

問 131. X を局所弧状連結な位相空間とし, $\pi : E \to X$ を F-被覆写像とする (F は離散空間). このとき, 任意の $x \in X$ において, $(U, \eta) \in \mathcal{LT}_F(\pi)$ であって, U は弧状連結であり, $x \in U$ となるものが存在することを示せ.

問 132. (対面発表) X を局所弧状連結な位相空間とし, $\pi : E \to X$ を F-被覆写像とする (F は離散空間). また Ω を連結位相空間とし, $\omega_0 \in \Omega$ を固定する. さらに $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \mathcal{C}(\Omega, E)$ であって, $\pi \circ \tilde{f}_1 = \pi \circ \tilde{f}_2$ かつ $\tilde{f}_1(\omega_0) = \tilde{f}_2(\omega_0)$ を満たすものも固定する.

(1) (修正版) $\Omega_c := \{\omega \in \Omega \mid \tilde{f}_1(\omega_1) = \tilde{f}_2(\omega_2)\} \subset \Omega$ とおく. また $f := \pi \circ \tilde{f}_1 = \pi \circ \tilde{f}_2$ とおく. このとき $(U, \eta) \in \mathcal{LT}_F(\pi)$ について, $f^{-1}(U) \cap \Omega_c$ および $f^{-1}(U) \cap (\Omega \setminus \Omega_c)$ は共に Ω の開集合あることを示せ.

(2) $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ を示せ.

問 133. $\pi : E \to X$ を F-被覆写像とする (F は離散空間). また $a, b \in X$ および $\tilde{a} \in E_a$ を固定する. このとき $\Pi(E, \tilde{a}, E_b) = \mathrm{Path}(E, \tilde{a}, E_b)/\sim_{h.b}$ となることを示せ. ただし $\Pi(E, \tilde{a}, E_b) := \bigsqcup_{\tilde{b} \in E_b} \Pi(E, \tilde{a}, \tilde{b})$ とおいた.

問 134. X を局所弧状連結な位相空間とし, $\pi : E \to X$ を F-被覆写像とする (F は離散空間). また $a, b \in X$ とし, $\tilde{a} \in E_a$ を固定する.

(1) $\mathrm{Path}(E, \tilde{a}, E_b) \to \mathrm{Path}(X, a, b),\ \ell \mapsto \ell_\pi := \pi \circ \ell$ は全単射であることを示せ.

(2) $\Pi(E, \tilde{a}, E_b) \to \Pi(X, a, b),\ [\ell]_b \mapsto [\ell_\pi]_b$ は全単射であることを示せ.

問 135. (対面発表) X を弧状連結かつ局所弧状連結な位相空間とし, E を単連結位相空間, $\pi : E \to X$ を F-被覆写像とする (F は離散空間). また $a \in X$ および $\tilde{a} \in E_a$ を固定する. このとき

$$\pi_1(X, a) \mapsto E_a,\ [\gamma]_b \mapsto \tilde{\gamma}(1)$$

は写像として well-defined で全単射となることを示せ. ただし各 $\gamma \in \mathrm{Loop}(X, a)$ について, $\tilde{\gamma} \in \mathrm{Path}(E, \tilde{a}, E_a)$ を $\tilde{\gamma}_\pi = \gamma$ を満たすただ一つの元として定める.