幾何学 B 演習問題 No.02 問 11–問 17

対面発表は問 11, 問 13, 問 14, 問 15, 問 17.

キーワード: 連続写像のホモトピー類, 位相空間の間のホモトピー同値写像

問 11. (重要: 対面発表) 位相空間 X, Y について, "ホモトピック" $\sim_h$ が $\mathcal{C}(X,Y)$ における同値関係を定めることを示せ.

以下, $\phi \in \mathcal{C}(X,Y)$ の $\sim_h$ による同値類 (ホモトピー類) を $[\phi]$ と書く. つまり

$$[\phi] := \{\phi' \in \mathcal{C}(X,Y) \mid \phi \sim_h \phi'\} \subset \mathcal{C}(X,Y).$$

また $\mathcal{C}(X,Y)$ の $\sim_h$ による商集合を $[X,Y]$ と書く.

問 12. X を位相空間とする. また $\{*\}$ を一点空間とする. X の各点 x について, ϕ_x を $\{*\}$ から X への連続写像であって, 像が $\{x\}$ となるものとする (cf. 演習問題 No.01: 問 8). 点 $x_1, x_2 \in X$ を固定する. このとき $\phi_{x_1} \sim_h \phi_{x_2}$ となることと, 点 x_1 と点 x_2 が X において同じ弧状連結成分に属することは同値であることを示せ.

問 13. (重要: 対面発表) X, Y, Z を位相空間とする. このとき, ホモトピー類の合成

$$[Y,Z] \times [X,Y] \to [X,Z],\ ([\phi_2],[\phi_1]) \mapsto [\phi_2] \circ [\phi_1] := [\phi_2 \circ \phi_1]$$

が well-defined であることを示せ.

問 14. (重要: 対面発表) 「ホモトピー類の合成は結合的である」という主張を定式化し, 証明せよ. また「恒等写像のホモトピー類は単位的」という主張も定式化し, 証明せよ.

以下, 位相空間 X と Y がホモトピー同値であるとき, $X \simeq_h Y$ と書く.

問 15. (対面発表) ホモトピー同値 $\simeq_h$ は "すべての位相空間の集まり" における同値関係となることを示せ. つまり, 以下が成り立つことを示せ:

(1) $X \simeq_h X$ for any X.

(2) $X \simeq_h Y$ implies $Y \simeq_h X$.

(3) $X \simeq_h Y$ and $Y \simeq_h Z$ imply $X \simeq_h Z$.

問 16.「位相空間が互いに同相ならホモトピー同値」を定式化し, 証明せよ.

問 17. (重要: 対面発表) 以下を示せ:

(1) $[a,b] \simeq_h \{*\} \simeq_h \mathbb{R} \simeq_h (a,b)$ for any $a < b$ in $\mathbb{R}$.

(2) $S^1 \simeq_h (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.