幾何学 B 演習問題 No.03 問 18–問 30

対面発表は問 20, 問 22, 問 26, 問 27.

キーワード: ホモトピー同値写像の直積, 可縮空間, 弱変形レトラクト

以下, 位相空間の有限列 $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ について, $\prod_i X_i$ または $\prod_{i=1}^n X_i$ を, $(X_i)_i$ の直積位相空間とする. また $(X_i)_{i=1,\dots,n}$, $(Y_i)_{i=1,\dots,n}$ をそれぞれ位相空間の有限列とし, 各 i について連続写像 $\phi_i : X_i \to Y_i$ が定まっているとき, 写像 $\prod_i \phi_i$ を

$$\prod_i \phi_i : \prod_i X_i \to \prod_i Y_i,\ (x_i)_i \mapsto (\phi_i(x_i))_i$$

として定める.

問 18. $(X_i)_{i=1,\dots,n}$, $(Y_i)_{i=1,\dots,n}$ をそれぞれ位相空間の有限列とする.

(1) 各 i について連続写像 $\phi_i : X_i \to Y_i$ を定める. このとき, 写像 $\prod_i \phi_i : \prod_i X_i \to \prod_i Y_i$ は連続であることを示せ.

(2) 各 i について連続写像の組 $\phi_i, \psi_i : X_i \to Y_i$ を定め, さらに H_i を ϕ_i から ψ_i へのホモトピーとする. このとき

$$H : (\prod_i X_i) \times I \to \prod_i Y_i,\ ((x_i)_i, t) \mapsto (H_i(x_i, t))_i$$

とおくと, H は $\prod_i \phi_i$ から $\prod_i \psi_i$ へのホモトピーを定めることを示せ.

(3) 各 i について連続写像の組 $\phi_i, \psi_i : X_i \to Y_i$ を $\phi_i \sim_h \psi_i$ を満たすものとして定める. このとき $\prod_i \phi_i \sim_h \prod_i \psi_i$ となることを示せ.

問 19. $(X_i)_{i=1,\dots,n}$, $(Y_i)_{i=1,\dots,n}$, $(Z_i)_{i=1,\dots,n}$ をそれぞれ位相空間の有限列とする.

(1) 各 i について id_{X_i} を X_i 上の恒等写像とする. このとき $\prod_i \mathrm{id}_{X_i}$ は $\prod_i X_i$ 上の恒等写像となる, すなわち

$$\prod_i \mathrm{id}_{X_i} = \mathrm{id}_{\prod_i X_i}$$

となることを示せ.

(2) 各 i について, $\phi_i \in C(X, Y)$, $\psi_i \in C(Y, Z)$ を定める. このとき, $\prod_i X_i$ から $\prod_i Z_i$ への写像として

$$(\prod_i \phi_i) \circ (\prod_i \phi_i) = \prod_i (\psi_i \circ \phi_i)$$

が成り立つことを示せ.

問 20. (対面発表) "ホモトピー同値写像たちの有限直積はホモトピー同値写像" を定式化し, 証明せよ.

問 21. "可縮空間たちの有限直積は可縮" を定式化し, 証明せよ.

問 22. (対面発表) "星状集合は可縮" を定式化し, 証明せよ.

問 23. $r > 0$ とする. このとき, $\mathbb{R}^n$, $B_r^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_i x_i^2 < r\}$, $D_r^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_i x_i^2 \leq r\}$ がそれぞれ星状集合であることを示せ.

問 24. "弱変形レトラクトはホモトピー同値" を定式化し, 証明せよ.

問 25. "弱変形レトラクトは合成で閉じる" を定式化し, 証明せよ.

裏へ

問 26. (対面発表) 以下の包含写像たちが弱変形レトラクトであることをそれぞれ示せ:

(1) $\iota : \{0\} \hookrightarrow [-1, 1]$.

(2) $\iota : [-1, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}$.

(3) $\iota : D^n_r \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ $(r > 0)$.

問 27. (対面発表) 以下 $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ or } x \in \mathbb{Z}\}$ とする.

(1) X の図を描け.

(2) $\iota : \mathbb{R} \to X, r \mapsto (r, 0)$ が弱変形レトラクトであることを示せ.

(3) X が可縮であることを示せ.

問 28. (優先度: 低) X を位相空間とし, A を X の部分空間 (部分集合に相対位相を入れたもの) とする. また

- A はコンパクトではない,
- A は X において相対コンパクト (i.e. A は X のあるコンパクト部分集合に含まれる)

とする. A から X への包含写像を ι とするとき, (A, ι) は弱変形レトラクトではないことを示せ.

問 29. (優先度: 低) 以下の包含写像たちがホモトピー同値写像ではあるが弱変形レトラクトではないことをそれぞれ示せ:

(1) $\iota : (-1, 1) \hookrightarrow [-1, 1]$.

(2) $\iota : (-1, 1) \hookrightarrow \mathbb{R}$.

(3) $\iota : B^n_r \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ $(r > 0)$.

問 30. (優先度: 低) "弱変形レトラクトたちの有限直積は弱変形レトラクト" を定式化し, 証明せよ.